Entwicklung einer WebApp zum Aufbau ausgewählter stochastischer Konzepte anhand extremer Schneehöhen in Österreich

Diplomarbeit im Lehramtsstudium
Mathematik - Geographie und Wirtschaftskunde

zur Erlangung des akademischen Grades
des Magister der Naturwissenschaften

eingereicht an der
Fakultät für Mathematik, Informatik und Physik
an der Universität Innsbruck

von

Daniel Lackner

Betreuer der Diplomarbeit: Tobias Hell und Florian Stampfer

Innsbruck, Jänner 2020

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre hiermit an Eides statt durch meine eigenhändige Unterschrift, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe. Alle Stellen, die wörtlich oder inhaltlich den angegebenen Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht.

Die vorliegende Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form noch nicht als Magister-/Master-/Diplomarbeit/Dissertation eingereicht.

Datum	Unterschrift

Kurzfassung

Diese Diplomarbeit dient als Leitfaden für Lehrpersonen zur Verwendung der WebApp „Stochastik mit extremen Schneehöhen“. In dieser werden Aufgabenstellungen in verschiedenen Schwierigkeitsgraden für SchülerInnen bereitgestellt, um grundlegende stochastische Konzepte, wie zum Beispiel diskrete und kontinuierliche Verteilungen, im Kontext von extremen Schneehöhen in Österreich zu erarbeiten. Die Anwendungsorientierung nimmt dabei eine zentrale Rolle ein, da SchülerInnen so die Relevanz mathematischer Inhalte für reale Problemstellungen erkennen. Die WebApp wurde mit der Methode des lauten Denkens von drei SchülerInnen und zwei Lehrpersonen erprobt. Dadurch konnte die WebApp optimiert werden und es stellte sich heraus, dass sie sich gut für den Einsatz im Unterricht zur Wiederholung stochastischer Konzepte mit einem konkreten Anwendungsbeispiel eignet.

Inhaltsverzeichnis

Tabellen- und Abbildungsverzeichnis

1 Einleitung

Eine häufige Frage von SchülerInnen im Mathematikunterricht ist „Warum müssen wir das lernen?“. In den meisten Fällen wird dabei auf das Verständnis zukünftiger Inhalte oder den Lehrplan verwiesen. Oftmals befriedigt diese Antwort die SchülerInnen nicht. Mit solchen Verweisen entsteht im Mathematikunterricht häufig der Eindruck, dass das Gelernte nichts mit der Realität zu tun hat oder für die Zukunft der SchülerInnen nicht von Bedeutung ist. Studien zeigen, dass dieser Eindruck bis ins Erwachsenenalter bestehen bleibt, sodass sich in der Öffentlichkeit eine Abneigung gegenüber der Mathematik zeigt (Maaß 2015: 38f). Eine mögliche Lösung, um diesem schlechten Eindruck der Mathematik in der Schule entgegenzuwirken, ist ein realitäts- und anwendungsbezogener Unterricht. In diesem werden Phänomene des Alltags aufgegriffen, relevante Fragestellungen erstellt und diese mit mathematischen Mitteln beantwortet. So kann Mathematik als ein vielfältiges Fach mit vielen Bezügen zu verschiedenen anderen Disziplinen und Berufsfeldern vermittelt werden.

In Zeiten des Klimawandels und der Fridays-for-Future-Bewegung ist die Aufmerksamkeit für atmosphärische Phänomene hoch. Zudem sind viele SchülerInnen durch die große Rolle des Wintersports in Österreich am Thema Schnee interessiert. Der Kontext der extremen Schneehöhen eignet sich somit gut, um anwendungsorientierten Mathematikunterricht durchzuführen. Deshalb wurde die WebApp „Stochastik mit extremen Schneehöhen“ für den Schulunterricht erstellt. Diese beruht auf der in einer Kooperation zwischen der Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik und der Universität Innsbruck entstandenen Arbeit von Schellander und Hell (2018), die sich mit der Modellierung von Extremschneehöhen in Österreich auseinandersetzt. In der WebApp werden Hintergrundinformationen sowie Aufgabenstellungen zu einer diskreten und einer kontinuierlichen Wahrscheinlichkeitsverteilung im Kontext von extremen Schneehöhen bereitgestellt. Diese Aufgaben können von SchülerInnen mithilfe von interaktiven Graphiken bearbeitet werden. Die WebApp kann mit jedem Browser unter folgendem Link am Server der Fachdidaktik Mathematik der Universität Innsbruck aufgerufen werden:

https://fachdidaktik-mathematik.uibk.ac.at/shiny/thesis/ExtremSchnee/

Diese Diplomarbeit dient als Leitfaden für Lehrpersonen zur Verwendung der WebApp im Unterricht. Sie beinhaltet Hintergrundinformationen, um sich auf den Einsatz der WebApp vorzubereiten. Auf eine Beschreibung der genauen didaktischen Umsetzung im Unterricht wird dabei verzichtet, da so jede Lehrperson die Sozialform, den zeitlichen Rahmen und die Ertragssicherung selbst bestimmen kann. An geeigneten Stellen sind jedoch Vorschläge angegeben.

Zu Beginn der Arbeit wird der mathematische Hintergrund zur Modellierung extremer Schneehöhen beschrieben. Dazu werden, neben der Relevanz des Themas, Informationen zur Binomial- und zur Extremwertverteilung im Kontext bereitgestellt. In einem nächsten Schritt wird der Stellenwert der Anwendungsorientierung und anhand eines Beispiels aus der WebApp der Kreislauf des Modellierens im Mathematikunterricht thematisiert. Anschließend werden mathematische Kompetenzmodelle vor allem für den Bereich der Stochastik vorgestellt und die WebApp in den österreichischen Lehrplan eingeordnet. In weiterer Folge wird die Umsetzung der schulrelevanten Inhalte im Kontext extremer Schneehöhen in der WebApp in den einzelnen Abschnitten Übersicht, Binomialverteilung, Extremwertverteilung und Return-Level-Plot beschrieben. Es werden die Wichtigkeit der dargestellten Themen argumentiert und mögliche Antworten auf die Aufgabenstellungen sowie weiterführende Informationen präsentiert. Zum Abschluss wird die Erprobung der WebApp mit drei SchülerInnen und zwei Lehrpersonen an allgemeinbildenden höheren Schulen analysiert und die wichtigsten Erkenntnisse und Änderungen dokumentiert.

2 Modellierung extremer Schneehöhen in Österreich

Enorme Mengen an Schnee stellen vor allem in Bergregionen eine große Naturgefahr dar. Durch Lawinen und frühjährliche Flutereignisse kommt es zu großen wirtschaftlichen Einbußen, die Gebäudeeinstürze und die Gefährdung menschlichen Lebens zur Folge haben. Außerdem entstehen indirekte Kosten durch eingeschränkte Mobilität, da Zug- und Straßenverbindungen beschädigt und nicht benutzt werden können. Es ist daher wichtig, die räumliche Verteilung der Schneehöhen zu kennen, um Gebäude, Lawinenverbauungen und den Hochwasserschutz zu planen. Darüber hinaus haben Versicherungen großes Interesse an einer solchen räumlichen Modellierung, da sie im Schadensfall häufig für die entstandenen Kosten aufkommen müssen.

Das mathematische Werkzeug zur Modellierung extremer Ereignisse ist die Extremwerttheorie. Seit Ende des 20. Jahrhundert ist sie ein beliebtes Werkzeug in der Finanzmathematik und in den Umweltwissenschaften, zum Beispiel bei der Modellierung von Regen- oder Winddaten. In den Geowissenschaften ist diese Vorgehensweise für einzelne Messstationen weit verbreitet, jedoch konnte bei Betrachtung der Schneehöhen in nur wenigen Fällen die räumliche Abhängigkeit über ein ganzes Land miteinbezogen werden. Die Schwierigkeit besteht darin, die vorhandenen Lücken zwischen den Messstationen durch geeignete räumliche Modellierung zu ergänzen. Mit der Methode des *smooth modelings* gelang dies zum Beispiel Blanchet und Lehning (2010) für die Schweiz oder Schellander und Hell (2018) für Österreich, auf deren Arbeit die Erstellung dieser WebApp aufbaut.

In der Modellierung extremer Schneehöhen werden jährliche Schneehöhenmaxima an beliebigen Orten in Österreich betrachtet. Dabei ist der größte Wert der Schneehöhe in einem Jahr von Bedeutung und nicht die Summe der Neuschneemengen. Bei einem n-jährlichen Extremschneeereignis handelt es sich um ein Jahr mit einem Schneehöhenmaximum, welches im Durchschnitt einmal in n Jahren vorkommt. Bei der Zahl n spricht man von der Jährlichkeit (*return period*). Die Schneehöhe, die in einem Jahr überschritten werden muss, um von einem n-jährlichen Extremschneeereignis zu sprechen, wird *return level* q genannt.

2.1 Binomialverteilung

Dieser Abschnitt widmet sich der Wahrscheinlichkeit für die Anzahl an Extremschneeereignissen in einem bestimmten Zeitraum und orientiert sich an Reiss und Thomas (1997: 6f).

Es wird angenommen, dass die jährlichen Schneehöhenmaxima $X_1, ..., X_n$ eine Stichprobe darstellen und damit voneinander unabhängig und identisch verteilt sind. In allen Jahren ist die Wahrscheinlichkeit für ein Extremschneeereignis dieselbe. Da es in Erwartung einmal in n Jahren auftreten soll, ergibt sich die Laplace-Wahrscheinlichkeit:

$$p = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}} = \frac{1}{n}$$

Mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$ übersteigt somit ein Schneehöhenmaximum in einem bestimmten Jahr das *return level* q und mit Wahrscheinlichkeit $1 - \frac{1}{n}$ bleibt es darunter. Somit kann eine neue Stichprobe erstellt werden, die aus Bernoulli-verteilten Zufallsvariablen Y_i besteht:

$$Y_i = \begin{cases} 1, & X_i \geq q \\ 0, & X_i < q \end{cases}$$

Es sei $Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ die Anzahl der Jahre, in denen ein n-jährliches Extremschneeereignis eintritt und somit das *return level* q überschritten wird. Die Zufallsvariabe Y ist dann binomialverteilt, hat also die Verteilung

$$B_{n,p} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{k} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-k} \delta_k.$$

So kann zum Beispiel berechnet werden, dass für 50 Jahre die Wahrscheinlichkeit genau eines Extremschneeereignisses ($k = 1$) bei rund 37 Prozent und die von keinem ($k = 0$) bei rund 36 Prozent liegt.

Betrachtet man die Anzahl der Extremschneeereignisse Y auf langen Zeitskalen beziehungsweise im Grenzfall $n \to \infty,\ p \to 0$, kann die Binomialverteilung $B_{n,p}$ durch die Poisson-Verteilung Π_λ mit Parameter $\lambda = \lim_{n\to\infty} np$ approximiert werden. Die „Wartezeit“ auf das nächste Extremschneeereignis kann mit der Exponentialverteilung mit Parameter λ modelliert werden.

Um die Verteilung der jährlichen Schneehöhenmaxima und das *return level* q für verschiedene Orte zu einer bestimmten Jährlichkeit n bestimmen zu können, wird weiteres Hintergrundwissen aus der Extremwerttheorie benötigt.

2.2 Extremwertverteilung

Um die jährlichen Schneehöhenmaxima mathematisch beschreiben zu können, wird ein neues stochastisches Konzept benötigt. Darum ist in weiterer Folge die Herleitung der verallgemeinerten Extremwertverteilung oder kurz GEV-Verteilung (*generalized extreme value distribution*) angeführt, mit der Extremereignisse modelliert werden können. Dieser Abschnitt basiert auf Coles (2001: 45f) und Blanchet und Lehning (2010: 2528f).

Das Ziel ist, für selten auftretende Schneehöhenjahresmaxima eine mathematische Beschreibung zu finden. Das bedeutet, es wird für unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariaben $X_1, ..., X_n$ mit der Verteilungsfunktion F die Verteilung des Maximums M_n gesucht:

$$M_n = \max\{X_1, ..., X_n\}$$

In unserem Fall entsprechen die X_i den jährlichen Schneehöhenmaxima und M_n entspricht dem höchsten Wert dieser Schneehöhen. Für die Verteilungsfunktion von M_n erhält man

$$\begin{aligned} P(M_n \leq x) &= P(X_1 \leq x, ..., X_n \leq x) \\ &= P(X_1 \leq x) \cdot ... \cdot P(X_n \leq x) \\ &= F(x)^n \end{aligned}$$

für $x \in \mathbb{R}$. Dadurch, dass die Verteilungsfunktion von F normalerweise nicht bekannt ist, bleibt auch die von M_n unbekannt. Deshalb behilft man sich damit, den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} F(x)^n$ zu bilden. Es kann angenommen werden, dass die Werte M_n mit steigendem n immer größer werden. Für alle Werte $x < x_0$ (wobei x_0 das kleinste Argument ist, bei dem die Verteilungsfunktion F den Wert 1 annimmt) ist allerdings $F(x) < 1$ und somit $\lim_{n\to\infty} F(x)^n = 0$, was zu einem Punktmaß führen würde.

Um dies zu umgehen, wird, ähnlich zum zentralen Grenzwertsatz, eine Standardisierung durchgeführt. Die analoge Aussage in der Extremwerttheorie geht auf das **Fisher-Tippett-Gnedenko-Theorem** zurück:

> Es seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Stichprobe und $M_n = \max\{X_1, ..., X_n\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Existieren zwei Familien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n > 0$, sodass
>
> $$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{M_n - a_n}{b_n} \leq x\right) = G(x),$$
>
> wobei G eine nicht-degenerierte Verteilungsfunktion ist (G nimmt nicht nur die Werte 0 und 1 an), dann gehört G zu einem der drei folgenden Typen von Verteilungen:

$$
\begin{aligned}
&\text{Typ I:} && G(x) = \exp\left(-\exp\left(-\frac{x-a}{b}\right)\right), \quad -\infty < x < \infty \\
&\text{Typ II:} && G(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \exp\left(-(\frac{x-a}{b})^{-\alpha}\right), & x > a \end{cases} \\
&\text{Typ III:} && G(x) = \begin{cases} \exp\{-\left(-(\frac{x-a}{b})^{\alpha}\right)\}, & x < a \\ 1, & x \geq a \end{cases}
\end{aligned}
$$

mit Parametern $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$.

Diese drei Arten werden als Gumbel- (Typ I), Fréchet- (Typ II) und Weibull-Verteilung (Typ III) bezeichnet. Sie können zu einer einzigen Verteilung kombiniert werden, der **verallgemeinerten Extremwertverteilung**:

Für $x \in \mathbb{R}$ und Parameter $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\xi \in \mathbb{R}$ ist

$$
G(x; \mu, \sigma, \xi) = \begin{cases} \exp\left(-(1 + \xi\frac{x-\mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}\right), & 1 + \xi\frac{x-\mu}{\sigma} > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}
$$

die Verteilungsfunktion der verallgemeinerten Extremwertverteilung. Im Fall $\xi = 0$ ergibt sich die Verteilungsfunktion durch Bilden des Grenzwertes $\xi \to 0$ und lautet:

$$
G(x; \mu, \sigma, 0) = \exp\left(-\exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)
$$

Die Verteilung der jährlichen Schneehöhenmaxima ist abhängig von den ortsabhängigen Parameter μ, σ und ξ. Der Lageparameter μ bestimmt das Zentrum der Verteilung und der Skalenparameter σ gibt die Breite dieser an. Diese beiden Parameter entsprechen aber nicht exakt dem Erwartungswert und der Standardabweichung, obwohl sie ähnlich gedeutet werden können. Der Formparameter ξ gibt Auskunft über die Form der Verteilung und insbesondere ihr Randverhalten. Mit dem Formparameter lässt sich die verallgemeinerte Extremwertverteilung den drei Typen aus dem Fisher-Tippett-Gnedenko-Theorem zuordnen. Verteilungen mit $\xi < 0$ zählen zum Weibull-Typ und weisen eine obere Schranke (*bounded*) auf, über der Werte nur mehr mit Warscheinlichkeit 0 auftreten. Eine Verteilung mit Parameter $\xi = 0$ gehört zum Typ Gumbel und eine mit Parameter $\xi > 0$ zum Typ Fréchet. Vor allem letztere lässt mit höherer Wahrscheinlichkeit höhere Werte aufgrund des oberen schweren Rands (*heavy tail*) der Verteilung zu (siehe Abb. 2.1).

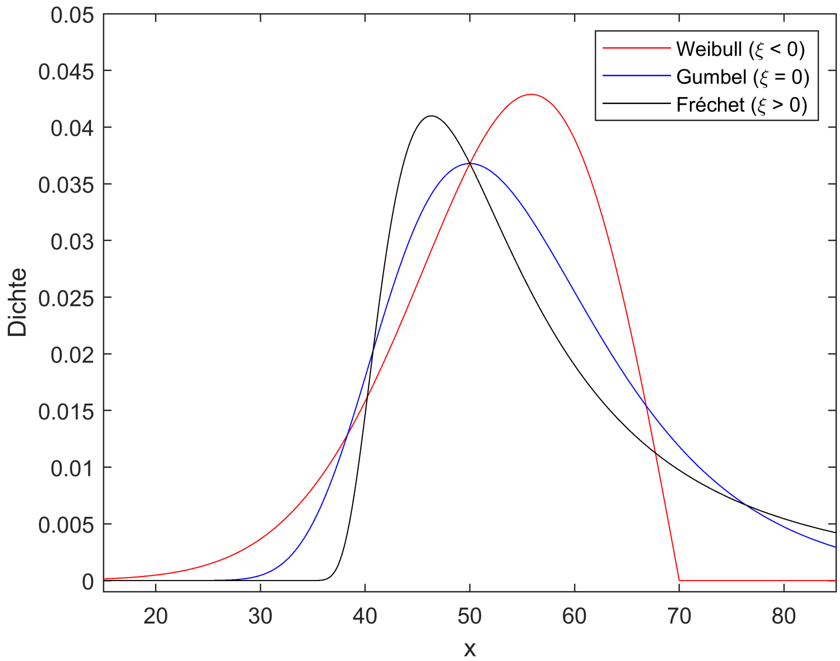

Abb. 2.1: Dichtefunktionen einer Weibull- ($\xi = -0.5$), Gumbel- ($\xi = 0$) und Fréchet-Verteilung ($\xi = 0.5$) mit $\mu = 50$ und $\sigma = 10$

Mit dem Wissen über die verallgemeinerte Extremwertverteilung kann das *return level* q mathematisch definiert werden. Es handelt sich um das $(1 - \frac{1}{n})$-Quantil der verallgemeinerten Extremwertverteilung. Schneehöhenjahresmaxima mit einem höheren Wert als das *return level* q treten an einem bestimmten Ort mit einer Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$ auf und somit ist diese Beschreibung konsistent zur Definition eines n-jährlichen Extremschneeereignisses. Um einen Überblick über die Verteilung zu bekommen, wird in einem sogenannten Return-Level-Plot häufig das *return level* q gegen die Jährlichkeit n auf einer logarithmischen Skala aufgetragen.

3 Anwendungsorientierter Zugang im Mathematikunterricht

Von anwendungsorientiertem Mathematikunterricht wird immer dann gesprochen, wenn zum Lösen einer realen Problemstellung die Verwendung von Mathematik notwendig ist. Die bekanntesten Anwendungsgebiete sind dabei die Physik und die Ökonomie. So sind beispielsweise Anwendungen im Bereich der Bewegungslehre und der Zinsrechnung weit verbreitet (Engel 2018: 4). Jedoch werden in den letzten Jahrzehnten immer mehr Disziplinen mathematisiert, da durch die Mathematik eine Rationalisierung stattfindet. Argumente, die durch Daten untermauert werden können, werden seltener angezweifelt und sind glaubhafter (Biehler und Engel 2015: 236). Dadurch eröffnet sich für den Mathematikunterricht ein weites Feld an Anwendungsbereichen.

Durch die Anwendungsorientierung können Einblicke in das Fach Mathematik wie auch in verschiedene Berufsfelder und Fachbereiche gegeben werden. Gleichzeitig liegen gerade in diesem Bereich die Schwierigkeiten des anwendungsorientierten Unterrichts, da über die Mathematik hinausgeblickt werden muss und zum Bearbeiten der Aufgaben Hintergrundwissen aus anderen Disziplinen benötigt wird. Die Erschließung der Umwelt und somit die Anwendungsorientierung funktioniert nur selten ohne reale Daten. Dieser Realitätsbezug der Aufgabenstellungen führt zu Authenzität und Lebensnähe. Die Aufgaben sind für die SchülerInnen glaubwürdiger und realistischer. In vielen Fällen werden sie als bedeutsam für das zukünftige Leben angesehen und erzeugen damit Relevanz (Greefrath et al. 2013: 25).

Eine wichtige Rolle beim Verarbeiten von realen Daten nimmt der Computer ein. Digitale Werkzeuge haben an Bedeutung für den Mathematikunterricht gewonnen, denn durch sie können große Datenmengen verarbeitet werden. Somit können vorher nicht zugängliche Inhalte in den Unterricht integriert und realitätsbezogene Probleme einfacher behandelt werden (Greefrath und Siller 2018: 4f). Speziell bei der Vermittlung stochastischer Inhalte können durch Technologieunterstützung unterschiedlichste Lernumgebungen geschaffen werden. Dabei kann der Fokus weg von aufwändigen Berechnungen hin zu konzeptionellem Denken gelegt werden. Die SchülerInnen können durch verschiedenste Simulationen die Zusammenhänge oder Unterschiede zwischen empirischen Phänomenen und Modellen herausfinden. Eigene Vermutungen können formuliert und getestet werden. Es können verschiedene Wahrscheinlichkeitsverteilungen eingeführt und deren Eigenschaften durch Variation der Parameter herausgefunden werden (Eichler und Vogel 2009: 246). Durch Simulationen können verschiedene Situationen der realen Welt bearbeitet werden, obwohl die SchülerInnen noch nicht über fortgeschrittenes stochastisches Wissen verfügen. In der Realität geht es häufig um das Erklären, Verstehen und Vorhersagen realer Phänomene. So kann die Nützlichkeit stochastischer Modelle jenseits des oft assoziierten Glücksspiels gezeigt werden (Biehler und Engel 2015: 242f).

Die Ziele eines anwendungsorientierten Unterrichts sind vielfältig. Greefrath (2018: 19ff) teilt sie in inhaltsorientierte, prozessorientierte und allgemeine Ziele ein. Zu den inhaltsorientierten Zielen gehört das Erlernen mathematischer Begriffe und Konzepte, aber auch die Kenntnis der Umwelt. Es müssen Muster und Erscheinungen der Alltagswelt zumindest soweit durchblickt werden, dass die reale Problemstellung in mathematischer Sprache dargestellt und die mathematische Lösung wieder in die Realität übersetzt werden kann. Zum Bereich der prozessorientierten Ziele zählen Diskussionen und Analysen mit mathematischen Mitteln. Wichtige Ziele sind dabei das Erwerben von Fähigkeiten im Bereich des Modellierens und des Problemlösens. Es sollte dabei nicht nur die Lösung einer Aufgabenstellung durch mathematische Operationen gefunden werden, sondern zusätzlich begründet und argumentiert werden, warum dies eine richtige Lösung sein kann. Es soll die mathematische Lösung im Kontext reflektiert und auf Plausibilität geprüft werden. Außerdem sollen Kenntnisse über den Gebrauch und Missbrauch der Mathematik erworben und die Grenzen der Mathematik aufgezeigt werden. Ein allgemeines Ziel des anwendungsorientierten Unterrichts ist eine Steigerung der Motivation, da der

Nutzen von Mathematik durch den Realitätsbezug verdeutlicht wird. So kann eine positivere Einstellung der SchülerInnen gegenüber der Mathematik erzeugt werden. Durch die Einbeziehung der Alltagswelt werden die SchülerInnen auf spätere Herausforderungen im Beruf oder im Studium vorbereitet. Solch ein weitreichender Unterricht hat in gewissem Sinne allgemeinbildenden Charakter und ist ein guter Ausgangspunkt für fächerübergreifenden Unterricht.

In einer empirischen Untersuchung von Kaiser-Messmer (1986: 142ff) konnte gezeigt werden, dass durch den anwendungsorientierten Zugang fast alle SchülerInnen ein besseres Verständnis der außermathematischen Situationen erhielten. Es konnte ein angemessenes Bild des Verhältnisses von Mathematik und Realität vermittelt werden. Schwierigkeiten traten vor allem beim Modellierungsprozess auf. Der Übergang von der Realität in die Mathematik und retour muss gelernt und geübt werden. So kommt es immer wieder vor, dass zwar die reale Problematik verstanden wird, aber sie durch das begrenzte mathematische Repertoire nicht in ein mathematisches Modell übersetzt werden kann. Zudem kommt es häufig vor, dass nach der richtigen Berechnung der mathematischen Lösung das Ergebnis nicht mehr mit dem Sachkontext in Verbindung gebracht wird (Daume 2009: 81ff). Unter Didaktikern (Humenberger und Reichel 1995: 18; Blum 1996: 23) besteht der Konsens, dass anwendungsorientierter Unterricht große Vorteile beim Verständnis abstrakter mathematischer Konzepte bietet. Es wird daher empfohlen, eine gute Mischung aus reinem und anwendungsorientierten Mathematikunterricht zu verwenden, da sowohl die Grundkonzepte als auch die Anwendungen zur Vermittlung eines adäquaten Bildes von Mathematik gehören. Obwohl der anwendungsorientierte Unterricht einen hohen Stellenwert im didaktischen Diskurs hat, wird er in der Praxis kaum eingesetzt. Als Gründe werden das Fehlen geeigneter Materialien, ein zu hoher zeitlicher Aufwand und unzureichende Ausbildung im Zuge des Lehramtsstudiums genannt. Außerdem sind sich Lehrpersonen bei komplexen Sachproblemen häufig unsicher (Daume 2009: 84ff). Es ist jedoch nicht unmöglich, einen innovativen Unterricht im Rahmen des Lehrplans durchzuführen. Entscheidend ist hier das Engagement der Lehrpersonen, die durch ihren Unterricht das Lernen der SchülerInnen maßgeblich beeinflussen (Biehler und Engel 2015: 244).

3.1 Modellierung im Mathematikunterricht

Um Anwendungen im Mathematikunterricht zu bearbeiten, müssen reale Problemstellungen soweit modelliert werden, dass sie mit mathematischen Methoden gelöst werden können. Das bedeutet, die Realität muss in einem ersten Schritt vereinfacht werden. Es wird nur der Teil der Wirklichkeit betrachtet, der zum Lösen der Problemstellung benötigt wird. Demnach ist ein Modell nicht die Wirklichkeit, sondern nur ein vereinfachtes Abbild der Realität. Das Modell kann je nach Fragestellung variieren und hat keine Allgemeingültigkeit. Ziel des gesamten Modellierungsprozesses ist es, durch den Umweg über ein mathematisches Modell eine Aussage über eine reale Situation treffen zu können (Engel 2018: 3ff).

Der Modellierungsprozess wird häufig als Kreislauf dargestellt. Solche Modellierungskreisläufe haben schon lange Tradition und wurden immer wieder erweitert. Eine der verbreitetsten ist der Modellierungskreislauf von Blum und Leiß (2005: 19), die viele vorherige Ideen (Blum 1985: 200; Fischer und Malle 1985: 101) kombinierten (siehe Abb. 3.1). So werden, neben dem sogenannten Rest der Welt und der Mathematik, die Teilprozesse des Modellierens abgebildet, die in einem Kreislauf durchlaufen werden.

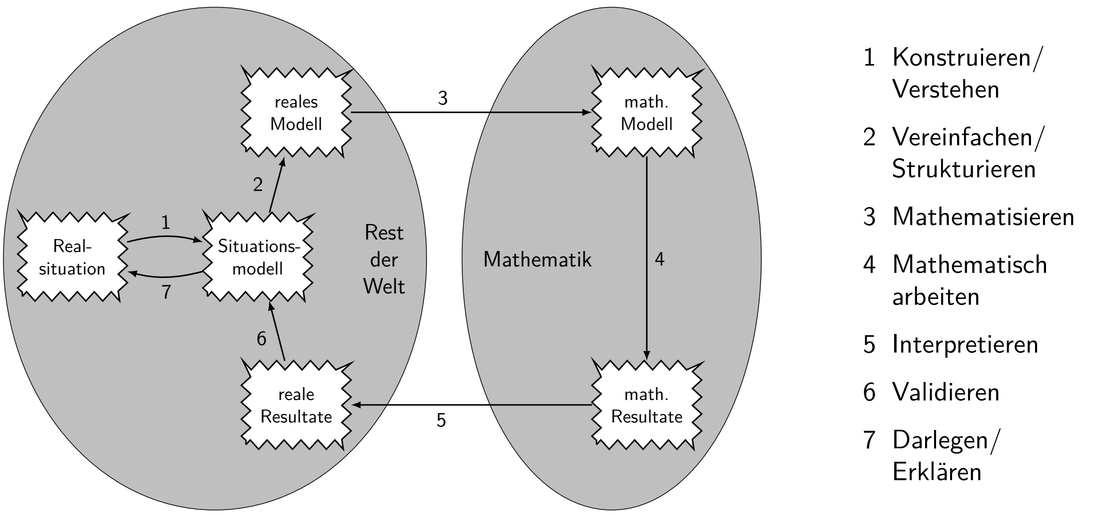

Abb. 3.1: Modellierungskreislauf nach Blum und Leiß (2005: 19)

Im Folgenden werden die einzelnen Schritte des Modellierungskreislaufs in Anlehnung an eine Fragestellung in der WebApp beschrieben. Es geht dabei darum, wie hoch der Wert eines Schneehöhenjahresmaximums in Klagenfurt sein muss, um von einem 50-jährlichen Extremschneeereignis zu sprechen.

Zu Beginn gibt es eine Realsituation, die eine Fragestellung aufwirft. Um diese Fragestellung beantworten zu können, müssen SchülerInnen zuerst die Realsituation verstehen. Sie kreieren ihr eigenes mentales Modell zur Problematik und es entsteht ein Situationsmodell. Dies wird im Anschluss vereinfacht und strukturiert, um es weiter bearbeiten zu können. Es werden wichtige von unwichtigen Informationen getrennt und ein Realmodell erstellt. Im Fall des 50-jährlichen Extremschneeereignisses in Klagenfurt ist die Situation relativ intuitiv, da Schneehöhen sehr anschaulich sind. Dennoch muss verstanden werden, dass das Schneehöhenjahresmaximum gesucht wird, das nur einmal in 50 Jahren überschritten wird. Weitere Vereinfachungen sind zum Beispiel, dass die Jahre sich gegenseitig nicht bedingen und somit unabhängig voneinander sind, was zum realen Modell führt.

Der nächste Schritt ist das Mathematisieren, also die Übersetzung des realen Modells in das mathematische Modell. Mit diesem mathematischen Modell wird in weiterer Folge gearbeitet, um eine mathematische Lösung zu erhalten. In unserem Fall ist bekannt, dass Betrachtungen von Maxima mit der verallgemeinerten Extremwertverteilung modelliert werden können. Mit den Messwerten der jährlichen Schneehöhenmaxima werden die Parameter der Extremwertverteilung für Klagenfurt geschätzt. Im Anschluss kann die gesuchte Schneehöhe (das *return level* $q = 77.5$) berechnet beziehungsweise aus der Verteilungsfunktion oder dem Return-Level-Plot in der WebApp abgelesen werden.

Im nächsten Schritt kann dieses Ergebnis wieder auf die Realsituation übertragen und im Kontext interpretiert werden. Die Ergebnisse werden in Bezug auf das Situationsmodell auf ihre Plausibilität überprüft und somit das Modell validiert. Wird festgestellt, dass dieses Modell noch keine schlüssigen Ergebnisse bringt, wird das Modell adaptiert und der Modellierungskreislauf erneut durchlaufen. In einem abschließenden Schritt werden die Resultate verwendet, um die Fragestellung zu beantworten. Im Fall von Klagenfurt kann aus dem Modell schlussgefolgert werden, dass die Schneehöhe von 77.5 cm nur in einem von 50 Jahren überschritten wird. Das Modell kann mit den echten Daten der jährlichen Schneehöhenmaxima für Klagenfurt (dargestellt im Boxplot) verglichen werden. Im Zeitraum von 1950 bis 2012 wurde das *return level q* nur einmal überschritten (Maximum bei 106 cm), weshalb das Modell als angemessen betrachtet werden kann.

Im Beispiel aus der WebApp werden den SchülerInnen zwar einige Schritte des Modellierungskreislaufs abgenommen, da sie für den Schulunterricht zu schwierig sind (zum Beispiel die Schätzung der Parameter der Extremwertverteilung). Dennoch müssen alle Prozesse des Modellierens nachvollzogen werden, um die Aufgabe erfolgreich bearbeiten zu können. Vor allem die Interpretation der mathematischen Resultate, die Validierung des Modells und die Beantwortung der Fragestellung stehen im Fokus.

3.2 Stochastische Kompetenzen

Der Begriff der Kompetenz prägt seit einiger Zeit die didaktische Forschung und die Schulwelt. Die bekannteste Definition stammt von Weinert (2001: 27f). Er beschreibt Kompetenzen als „Fähigkeiten und Fertigkeiten, um bestimmte Probleme zu lösen, sowie die damit verbundenen motivationalen, volitationalen und sozialen Bereitschaften und Fähigkeiten, die Problemlösungen in variablen Situationen erfolgreich und verantwortungsvoll nutzen zu können“. Bevor auf die mathematischen Kompetenzen im Stochastikunterricht in Deutschland und Österreich eingegangen wird, folgen noch einige Überlegungen, welchen Zweck der Stochastikunterricht verfolgt.

In der Didaktik wird häufig das stochastische und statistische Denken als Ziel genannt. Unter stochastischem Denken versteht man einen vernünftigen Umgang mit Wahrscheinlichkeiten und stochastischen Modellen. Es sollen zufällige Vorgänge identifiziert, geeignete Modellannahmen getroffen und durch die Verwendung stochastischer Verfahren Ergebnisse berechnet und in weiterer Folge interpretiert werden. In der neueren Zeit rückt der Begriff des statistischen Denkens immer mehr in den Vordergrund. Der Unterschied zum stochastischen Denken liegt in der Einbeziehung von realen Daten, die mit einer gewissen Unsicherheit behaftet sind. Durch Hypothesentests können Probleme bearbeitet und Aussagen über die Signifikanz von Ergebnissen getroffen werden (Daume 2009: 96f). Durch die vermehrte Präsenz von Daten in den Medien entstand im angelsächsischen Raum ein weiterer Begriff: *statistical literacy*. Es werden stochastische Kompetenzen benötigt, um berufliche und persönliche Entscheidungen auf Basis von Daten zu treffen. Dieser Begriff beschreibt vor allem die Fähigkeit, in verschiedenen Diagrammen und Kennzahlen verpackte Daten zu lesen, kritisch zu hinterfragen und zu interpretieren (Biehler und Engel 2015: 224).

Um diese drei Bereiche im Unterricht abzudecken, wurden verschiedene Kompetenzkataloge für die Schule entwickelt. In Deutschland wurden für die allgemeine Hochschulreife im Fach Mathematik allgemeine mathematische Kompetenzen und Leitideen in unterschiedlichen Anforderungsniveaus formuliert (KMK 2012: 11f). Zu allgemeinen mathematischen Kompetenzen werden Fähigkeiten gezählt, die bei der Bearbeitung von allen mathematischen Problemen von Bedeutung sind.
Dazu zählen:

- mathematisch argumentieren
- Probleme mathematisch lösen
- mathematisch modellieren
- mathematische Darstellungen verwenden
- mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen
- mathematisch kommunizieren

Außerdem werden fünf große Sachbereiche der Mathematik angegeben, die Leitideen: Algorithmus und Zahl, Messen, Raum und Form, funktionaler Zusammenhang, Daten und Zufall. Unter dem Punkt Daten und Zufall, welcher für die WebApp am meisten von Bedeutung ist, fallen Begriffe und Methoden zur Aufbereitung und Interpretation von statistischen Daten. Mit ihnen werden zufallsabhängige Situationen beschrieben und modelliert. Genauer gesagt sollen SchülerInnen selbst statistische Erhebungen planen und beurteilen und mehrstufige Zufallsexperimente auf stochastische Unabhängigkeit untersuchen. Mithilfe von binomialverteilten und normalverteilten Zufallsgrößen sollen stochastische Situationen untersucht und mit Hypothesentests Daten interpretiert und die Unsicherheit der Aussagen angegeben werden (KMK 2012: 21).

In Österreich setzen sich mathematische Kompetenzen ähnlich wie in Deutschland aus einer Inhalts-, einer Handlungs- und einer Komplexitätsdimension zusammen (siehe Abb. 3.2).

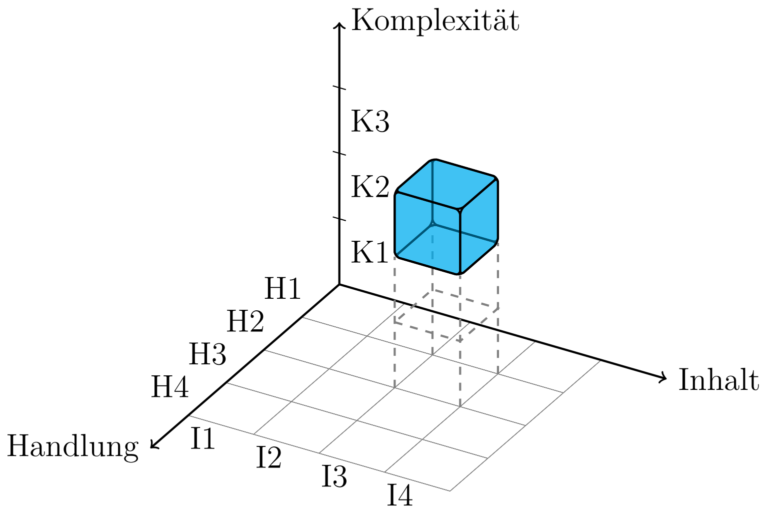

Abb. 3.2: Mathematische Kompetenz zusammgesetzt aus Inhalts-, Handlungs- und Komplexitätsdimension nach AECC-M (2007: 9)

Die Inhaltsdimension umfasst das Wissen über große Teilbereiche der Mathematik wie zum Beispiel Wahrscheinlichkeit und Statistik, welche in Hinblick auf die WebApp interessant ist. Die Handlungsdimension besteht aus Fähigkeiten und Fertigkeiten, die benötigt werden, um mit diesen inhaltlichen Bereichen arbeiten zu können. Dabei werden die wichtigsten Schritte des Modellierungskreislaufs genannt (siehe Abb. 3.1). Wichtige Prozesse sind das Übersetzen von realen Situationen in die Sprache der Mathematik, das richtige Anwenden von mathematischen Methoden und das anschließende Interpretieren und kritische Hinterfragen der

Ergebnisse. Dabei werden verschiedene Komplexitätsstufen unterschieden. Diese gehen von der Reproduktion über Vernetzungen bis zur Reflexion (siehe Tab. 3.1). In Österreich gilt es zur positiven Absolvierung der standardisierten Reife- und Diplomprüfung im Fach Mathematik klar definierte mathematische Grundkompetenzen und deren Vernetzung nachzuweisen. Die Grundkompetenzen im Bereich der Stochastik wurden in Anlehnung an die Lehrplaninhalte erstellt, welche im anschließenden Kapitel in Bezug auf die WebApp behandelt werden (BMB 2019: 1f).

Tab. 3.1: Kompetenzmodell im österreichischen Lehrplan der AHS-Oberstufe im Fach Mathematik (BMB 2016: 69f)

Inhaltsdimension	**Handlungsdimension**	**Komplexitätsdimension**
Algebra und Geometrie	Darstellend-modellierendes Arbeiten	Einsetzen von Grundwissen und Grundfähigkeiten
Funktionale Abhängigkeiten	Formal-operatives Arbeiten	Herstellen von Verbindungen
Analysis	Interpretierend-dokumentierendes Arbeiten	Problemlösen und Reflektieren
Wahrscheinlichkeit und Statistik	Kritisch-argumentatives Arbeiten	

3.3 Einordnung der WebApp in den Lehrplan

Große Teile der im Lehrplan der allgemeinbildenden höheren Schulen (BMB 2016: 67-74) geforderten didaktischen Grundsätze und der fachlichen Inhalte zum Aufbau stochastischer Kompetenzen werden mithilfe der Informationen und Fragestellungen in der WebApp angesprochen.

Im Lehrplan wird die Vermittlung von mathematischen Kompetenzen, die von grundlegender Bedeutung für das Fach selbst und für viele Lebensbereiche sind, als Bildungs- und Lehraufgabe gesehen. Ein zentrales Anliegen des Mathematikunterrichts ist das Lösen von realen Problemstellungen durch mathematische Verfahren. Es sollen Verknüpfungen zwischen der Mathematik und verschiedenen Bildungsbereichen hergestellt werden. Zwei dieser Bildungsbereiche, die durch die WebApp angesprochen werden, sind „Mensch und Gesellschaft“ und „Natur und Technik“. Durch die WebApp wird die enge Verbindung der relativ abstrakten Mathematik mit der realen Welt thematisiert. Es können relevante Fragestellungen rund um ein anschauliches Naturphänomen, wie die jährlichen Schneehöhenmaxima, aufgeworfen und mithilfe von Mathematik beschrieben und beantwortet werden.

Zu den didaktischen Grundsätzen zählt vor allem, dass Lernen ein individueller, aktiver und konstruktiver Prozess ist. Durch das selbstständige Bearbeiten der WebApp können die SchülerInnen neue Erkenntnisse gewinnen und dadurch ihr Wissenssystem erweitern. Das im Lehrplan geforderte „Lernen in anwendungsorientierten Kontexten“ wird besonders unterstützt. Dabei geht es vor allem um die Verdeutlichung der Nützlichkeit der Mathematik in vielen Lebensbereichen. Durch die Verwendung von meteorologischen Daten ist ein fächerübergreifender Unterricht mit dem Fach Geographie sehr gut möglich. In den Fragestellungen werden die Bearbeitung der anwendungsorientierten Probleme und die Reflexion der Modellierung im Vergleich mit den realen Daten der jährlichen Schneehöhenmaxima verlangt. Es soll außerdem zu „Lernen mit technologischer Unterstützung“ im Unterricht kommen. Dabei werden technologische Hilfsmittel zum leichteren Verständnis der mathematischen Konzepte verwendet und als sinnvolles Werkzeug beim Modellieren und Visualisieren eingesetzt. Dies wird in der WebApp durch mögliche Änderungen der Parameter bei verschiedenen wahrscheinlichkeitstheoretischen Darstellungen, wie zum Beispiel der Dichtefunktion der Extremwertverteilung, realisiert.

Je nach Verwendung der WebApp im Unterricht, kann „mit instruktionaler Unterstützung“ und „unter vielfältigen Aspekten“ gelernt werden. Die SchülerInnen sollen im Unterricht mit dem nötigen Hintergrundwissen auf die Bearbeitung der WebApp vorbereitet und bei auftretenden Problemen gezielt unterstützt werden. Die Fragestellungen sind außerdem so angelegt, dass die Schwierigkeit zunimmt, sodass im Sinne der Differenzierung alle SchülerInnen zumindest einen Teil der

Aufgaben erfolgreich bearbeiten können. Extreme Schneehöhen können sowohl aus geographischer als auch aus mathematischer Sicht betrachtet und somit aus verschiedenen Blickwinkeln beleuchtet werden. So wird eine eindimensionale Betrachtung der Inhalte verhindert und es entsteht ein ausgewogenes Bild der Thematik. Die „Sicherung des Unterrichtertrags“ kann durch Projektarbeiten in verschiedenen Sozialformen (Einzel- oder Gruppenarbeiten) erfolgen, in denen die Bearbeitung der Fragestellungen dokumentiert und die persönlichen Erkenntnisse festgehalten werden. Dadurch kann nicht nur der Prozess, sondern am Ende auch ein Produkt bewertet werden, was zur objektiven Benotung beiträgt.

Die Inhalte lassen sich im Lehrplan in die 7. und 8. Klasse des AHS-Lehrplans einordnen. Mit dem Abschnitt über die Binomialverteilung wird die Modellierung einer diskreten Größe über eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung im Kontext von extremen Schneehöhen behandelt. In einer intuitiven Art und Weise werden relative Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten in Zusammenhang gebracht, da die Wahrscheinlichkeit für ein Extremschneeereignis über die Laplace-Wahrscheinlichkeit und somit als relativer Anteil bestimmt wird. Die starken Annahmen der Binomialverteilung (unabhängige und identische Durchführungen eines Zufallsexperiments) werden thematisiert und im realitätsnahen Kontext von Extremschneeereignissen angewendet.

Lehrplaninhalte zur Stochastik in der 7. Klasse AHS (BMB 2016: 73):

> **Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen:**
> - Die Begriffe „diskrete Zufallsvariable“ und „diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung“ kennen
> - Den Zusammenhang zwischen relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten kennen
> - Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung einer diskreten Zufallsvariablen (Wahrscheinlichkeitsverteilung) kennen und deuten können
> - Den Binomialkoeffizienten und seine wichtigsten Eigenschaften kennen
> - Mit diskreten Verteilungen (insbesondere mit der Binomialverteilung) in anwendungsorientierten Bereichen arbeiten können

Die Abschnitte Extremwertverteilung und Return-Level-Plot gehen über die geforderten Inhalte des Lehrplans hinaus. Mit der verallgemeinerten Extremwertverteilung lernen die SchülerInnen zusätzlich zur Normalverteilung eine weitere stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung kennen. Durch gezielte Fragestellungen werden sie aufgefordert, die Extremwertverteilung im Kontext von extremen Schneehöhen anzuwenden und mit stochastischen Kennzahlen wie Quantilen oder Darstellungen wie Boxplots zu arbeiten.

Lehrplaninhalte zur Stochastik in der 8. Klasse AHS (BMB 2016: 74):

> **Stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen, beurteilende Statistik:**
> - Die Begriffe „stetige Zufallsvariable“ und „stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung“ kennen
> - Die Normalverteilung zur Approximation der Binomialverteilung einsetzen können
> - Die Normalverteilung in anwendungsorientierten Bereichen verwenden können
> - Konfidenzintervalle ermitteln und interpretieren können
> - Einfache statistische Hypothesentests durchführen und deren Ergebnisse interpretieren können

4 Umsetzung der WebApp

Die WebApp zur Erarbeitung von stochastischen Themen mit extremen Schneehöhen wurde mithilfe von R-Shiny-Elementen programmiert und wird am Server der Fachdidaktik Mathematik der Universität Innsbruck bereitgestellt. Sie kann mit jedem Browser unter folgendem Link aufgerufen werden:

https://fachdidaktik-mathematik.uibk.ac.at/shiny/thesis/ExtremSchnee/

In den nachfolgenden Kapiteln werden die Abschnitte Übersicht, Binomialverteilung, Extremwertverteilung und Return-Level-Plot der WebApp beschrieben und Hintergrundwissen für Lehrpersonen bereitgestellt. Durch die Angabe von Antwortmöglichkeiten zu den Aufgabenstellungen wird der Erwartungshorizont präsentiert. Die Aufgabenstellungen sind in verschiedene Schwierigkeitsgrade eingeteilt, womit Möglichkeiten zur Differenzierung geboten werden. Eine Aufgabe wird in mehrere Teilaufgaben zerlegt, die vom Schwierigkeitsgrad her ansteigend sind. Dies führt dazu, dass schwächere SchülerInnen die Chance haben, grundlegende Aufgabenstellungen erfolgreich zu bearbeiten und leistungsstärkere SchülerInnen durch Problemstellungen mit höheren Anforderungen nicht unterfordert oder sogar gelangweilt sind (Büchter und Leuders 2016: 105ff). Durch die Aufteilung in Teilaufgaben soll zudem verhindert werden, dass erste Aufgaben vor allem für schwächere SchülerInnen schon unlösbar erscheinen und dadurch demotivierend für die weitere Bearbeitung der WebApp wirken. Ziel dieser Vorgangsweise ist, dass sich SchülerInnen ins Thema einarbeiten und eine größere Chance besteht, dass schwierigere Aufgaben gelöst werden können.

Die Schwierigkeitsgrade wurden den Aufgabenstellungen in Anlehnung an die drei Komplexitätsdimensionen der mathematischen Kompetenzen zugeordnet. Zusätzlich zur Einteilung des Schwierigkeitsgrads mit Stern-Symbolen wurden durch die

Verwendung von Operatoren die unterschiedlichen Komplexitätsstufen hervorgehoben. Operatoren sind bestimmte Verben, die die Handlungen der SchülerInnen lenken und strukturieren sollen. Der Einsatz dieser Operatoren dient der Kompetenzorientierung und ist unter anderem bei der standardisierten Reife- und Diplomprüfung üblich (Reitbrecht und Sorger 2018: 2f). Aufgabenstellungen mit dem Schwierigkeitsgrad ☆ sind mit dem Einsatz von Grundwissen und Grundfähigkeiten zu lösen und es werden Operatoren wie „angeben“ oder „bestimmen“ verwendet. Beim Schwierigkeitsgrad ☆☆ kommt es zum Transfer und der Reorganisation von Wissen und es werden Operatoren wie „untersuchen“ oder „vergleichen“ benutzt. Beim höchsten Schwierigkeitsgrad ☆☆☆ kommt es zur Reflexion und Problemlösung und die Aufgabenstellungen werden mithilfe von Operatoren wie „beurteilen“ oder „interpretieren“ formuliert.

Konkrete Anweisungen für den Einsatz der WebApp im Unterricht werden nicht angegeben, dies bleibt jeder Lehrperson selbst überlassen. Der zeitliche Rahmen, die Sozialform zur Erarbeitung und die Ergebnissicherung können somit nach Belieben angepasst werden. Ein Vorschlag zur Umsetzung in der Schule ist die WebApp als fächerübergreifendes Projekt in den Fächern Mathematik und Geographie zu verwenden. Dafür können nach Behandlung der Normalverteilung im Mathematikunterricht entweder ein Projekttag oder mehrere Unterrichtsstunden dafür verwendet werden, um in Zweier-Gruppen die WebApp zu bearbeiten und einen Projektbericht mit der Beantwortung der Aufgabenstellungen zu verfassen. Mit der Unterstützung einer Lehrperson aus dem Fach Geographie kann dieser Bericht um eine meteorologische Betrachtung von Schneefällen oder Thematisierung von Schnee als Naturgefahr ergänzt werden.

4.1 Abschnitt „Übersicht“

Der Abschnitt „Übersicht“ dient als Einstieg in die WebApp (siehe Abb. 4.1). Hier erhalten sowohl SchülerInnen als auch Lehrpersonen einen ersten Eindruck, welche Anforderungen diese WebApp an sie stellt und welche Inhalte thematisiert werden. Dabei werden die mathematischen Themen genannt, die gleichzeitig die

Überschriften der einzelnen Abschnitte sind, und als roter Faden für die WebApp dienen.

Im Vordergrund dieser Übersichtsseite steht, dass die SchülerInnen die Relevanz der Betrachtung von Extremschneeereignissen erkennen. Durch den Einsatz solcher Extremwertanalysen bei Versicherungen wird die Anwendung der Mathematik in Alltagssituationen sichtbar. Zudem wird die Quelle genannt, die zur Erstellung der WebApp herangezogen wurde, wodurch eine Nähe zur aktuellen Forschung hergestellt wird. Die hohe Relevanz dieses Themas soll die SchülerInnen motivieren die WebApp zu bearbeiten. Die Bilder dienen dabei als graphische Visualisierung des Modellierungsprozesses. Sie sollen den Zusammenhang zwischen einer realen Problemstellung und der Mathematik anschaulich darstellen und zugleich einen ersten Überblick über die in der WebApp verwendeten Darstellungen aus dem Bereich der Stochastik schaffen.

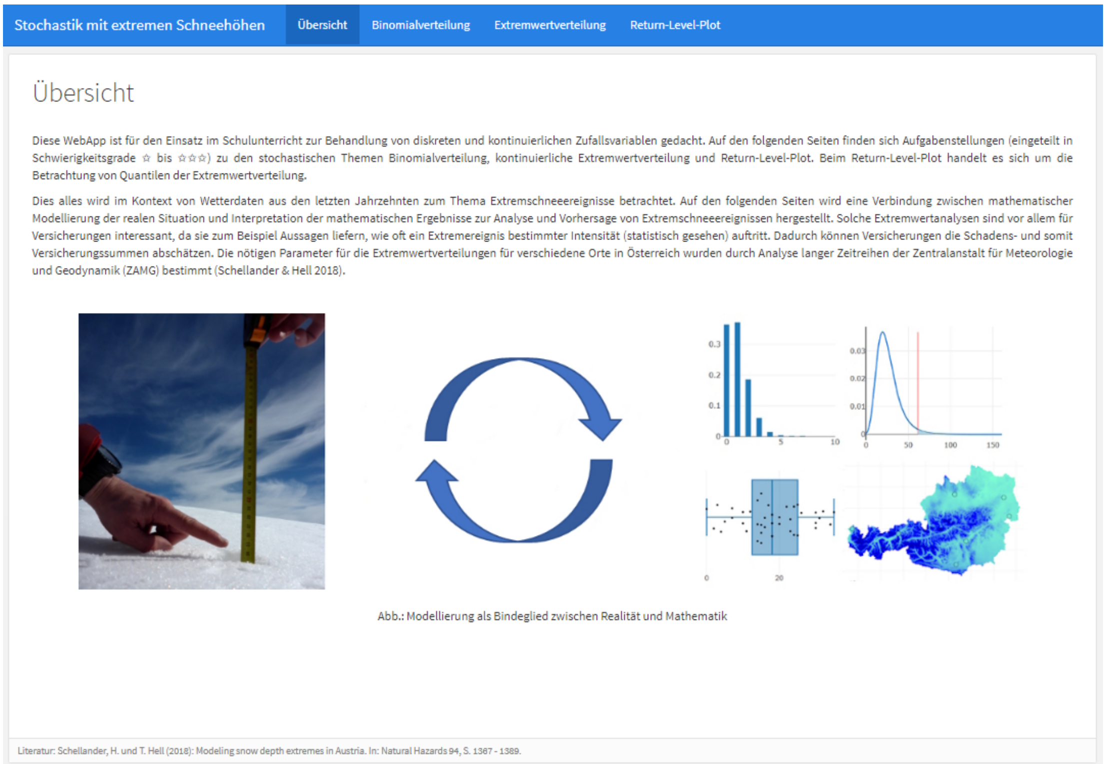

Abb. 4.1: Der Abschnitt „Übersicht“ der WebApp

4.2 Abschnitt „Binomialverteilung“

In diesem Abschnitt wird die Wahrscheinlichkeit für die Anzahl von Extremschneeereignissen in einer bestimmten Zeitperiode behandelt (siehe Abb. 4.2). Zur Modellierung solcher Problemstellungen wird die Binomialverteilung verwendet (siehe Kapitel 2.1).

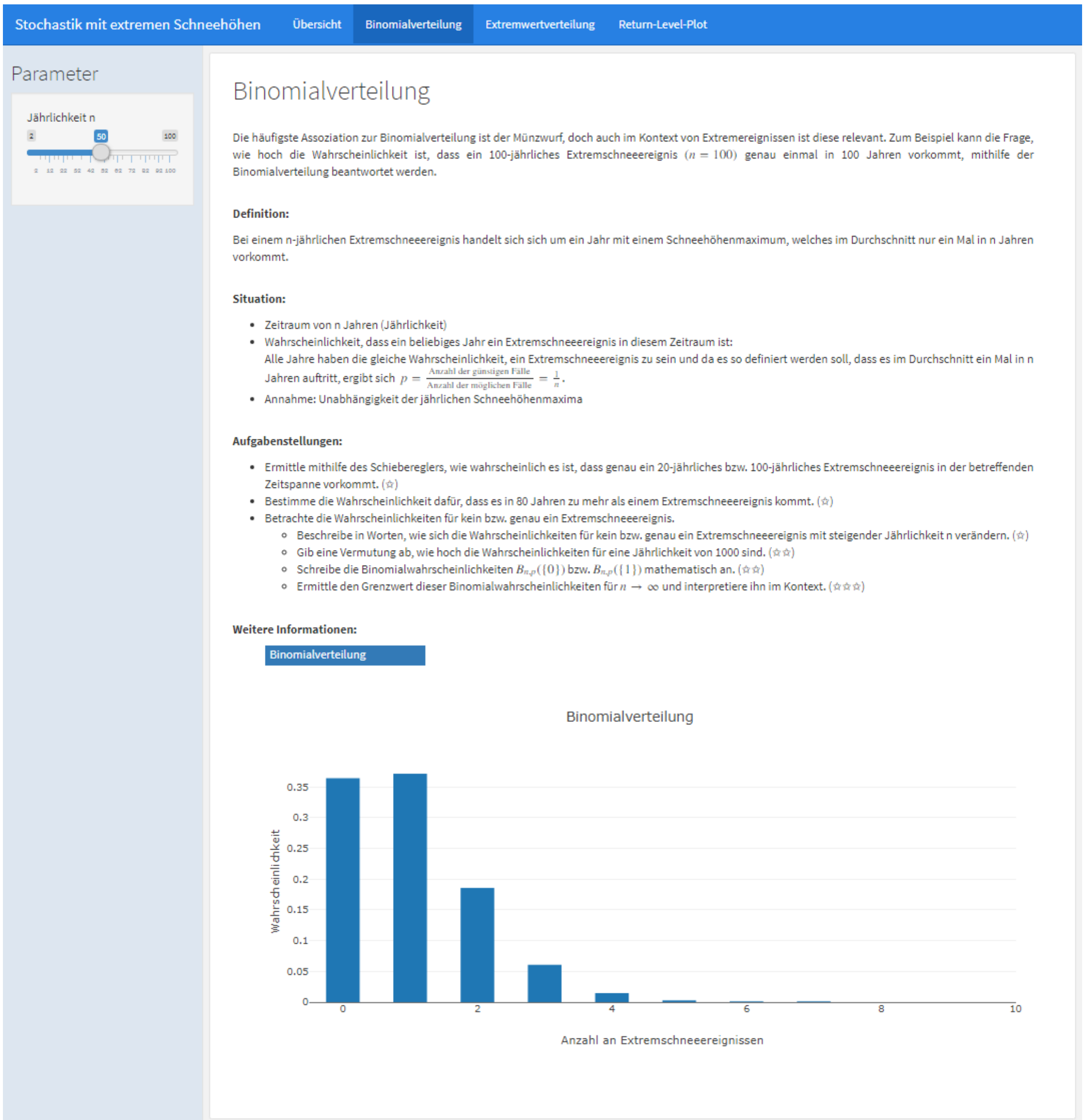

Abb. 4.2: Der Abschnitt „Binomialverteilung“ der WebApp

Zufallsvariablen und die zugehörigen Verteilungen bilden einen grundlegenden Teil der Wahrscheinlichkeitstheorie. Deren Behandlung ist daher im Unterricht notwendig. Durch die Zufallsvariable X werden die Elementarereignisse $\omega \in \Omega$ auf eine reelle Zahl $X(\omega)$ abgebildet. In weiterer Folge spielt der häufig sehr komplizierte Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ im Hintergrund keine Rolle mehr, sondern es muss nur noch die Wahrscheinlichkeit betrachtet werden, dass Werte einer Zufallsvariable auftreten beziehungsweise in einem bestimmten Intervall liegen. Durch die Anwendung von Verteilungen können stochastische Situationen oft leichter modelliert, beschrieben und analysiert werden (Tietze et al. 2002: 15).

Zunächst stehen diskrete Verteilungen, also Betrachtungen der Wahrscheinlichkeiten von Zufallsvariablen, die fast sicher höchstens abzählbar unendlich viele Werte annehmen, im Vordergrund. Diskrete Verteilungen haben eine große praktische Bedeutung und sind besser vorstellbar als kontinuierliche. Somit lässt sich die Begriffsbildung mit diskreten Verteilungen leichter durchführen (Tietze et al. 2002: 16). Im Unterricht wird als Verteilung einer diskreten Zufallsvariablen in den meisten Fällen die Binomialverteilung behandelt, da diese ein breites Anwendungsfeld in der Realität hat und daher sehr anschaulich ist. Beispiele dafür sind Fragen zum wiederholten Werfen eines Würfels (kein Sechser, Sechser), zur Anzahl von Gendefekten in einer Population oder zur Anzahl von fehlerhaften Produkten bei einer Serienfertigung. Dabei ist wichtig zu thematisieren, welche Vereinfachungen getroffen werden. Es müssen vor allem die Annahmen der Unabhängigkeit und der identischen Verteilung der einzelnen Bernoulli-Experimente besprochen und gerechtfertigt werden, welche sich häufig mit inhaltlichen Argumenten begründen lassen (Eichler und Vogel 2009: 301).

In der WebApp wird die Binomialverteilung eingesetzt, um die Wahrscheinlichkeit für die Anzahl von n-jährlichen Extremschneeereignissen in einer Zeitperiode von n Jahren zu bestimmen. Dabei wird nach einem kurzen einführenden Beispiel, welches die Nützlichkeit dieser Herangehensweise für die SchülerInnen zeigen soll, die Situation und die Modellierung erklärt. Im linken Teil der Seite kann die Jährlichkeit n verändert werden. Besonderer Wert wird darauf gelegt, die Charakteristika der Binomialverteilung zu beleuchten. Sollten die SchülerInnen die mathematischen Grundlagen zur Binomialverteilung nicht mehr so präsent haben, können diese bei weiteren Informationen zur Binomialverteilung nachgelesen werden. In jedem der n Bernoulli-Experimente wird festgestellt, ob es sich bei diesem einen Jahr um ein Extremschneeereignis handelt oder nicht. Um die Wahrscheinlichkeit anzugeben, dass ein einzelnes Jahr ein Extremschneeereignis ist, wird die Gleichverteilung angenommen und somit die Laplace-Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{n}$ bestimmt. Zudem wird die notwendige Annahme getroffen, dass die jährlichen Schneehöhenmaxima unabhängig voneinander sind. Diese Annahme kann dadurch argumentiert werden, dass nicht die übliche Einteilung des Jahres in Jänner bis Dezember gewählt wird, sondern eine Wintersaison als ein Jahr angenommen wird. Bei normaler Jahreseinteilung könnten die Schneehöhen im Dezember des einen Jahres die Schneehöhenmaxima im Jänner des nächsten Jahres beeinflussen. Außerdem wird ein zeitlicher Trend der jährlichen Schneehöhenmaxima ausgeschlossen. Durch die Betrachtung einer n-fachen Durchführung dieses Bernoulli-Versuchs kann die Binomialwahrscheinlichkeit für ein k-faches Auftreten eines Extremschneeereignisses in der Zeitperiode n angegeben werden:

$$B_{n,p}(\{k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Dazu gibt es verschiedene Aufgabenstellungen, mit denen die SchülerInnen die Inhalte zur Binomialverteilung im Kontext von Extremschneeereignissen erarbeiten können.

Ermittle mithilfe des Schiebereglers, wie wahrscheinlich es ist, dass genau ein 20-jährliches bzw. 100-jährliches Extremschneeereignis in der betreffenden Zeitspanne vorkommt. (☆)

Mit dieser relativ einfachen Aufgabenstellung soll ein angenehmer Einstieg in die WebApp gelingen, durch die der Fokus auf das Verstehen des Anwendungsbezugs und der Modellierung gelenkt werden soll. Bei einem 20-jährlichen Extremschneeereignis muss verstanden werden, dass es sich um eine Jährlichkeit von $n = 20$

handelt. Diese Jährlichkeit kann mit dem Schieberegler auf der linken Seite eingestellt werden. Danach kann aus dem Histogramm der Binomialverteilung die Wahrscheinlichkeit für genau ein Extremsschneeereignis abgelesen werden: $B_{20,\frac{1}{20}}(\{1\}) = 0.3773$. Bei einem 100-jährlichen Extremschneeereignis muss der Schieberegler auf eine Jährlichkeit von $n = 100$ gestellt werden und es kann wiederum die Binomialwahrscheinlichkeit abgelesen werden: $B_{100,\frac{1}{100}}(\{1\}) = 0.3697$. In Worten bedeutet das, dass es mit 37.73%iger Wahrscheinlichkeit zu genau einem 20-jährlichem Extremschneeereignis in 20 Jahren und mit 36.97%iger-Wahrscheinlichkeit zu genau einem 100-jährlichem Extremschneeereignis in 100 Jahren kommt. Dieses Ergebnis kann ebenfalls durch Nachrechnen überprüft werden:

$$
\begin{aligned}
B_{20,\frac{1}{20}}(\{1\}) &= \binom{20}{1} \cdot \left(\frac{1}{20}\right)^{1} \cdot \left(\frac{19}{20}\right)^{19} = 0.3773 \\
B_{100,\frac{1}{100}}(\{1\}) &= \binom{100}{1} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^{1} \cdot \left(\frac{99}{100}\right)^{99} = 0.3697
\end{aligned}
$$

Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es in 80 Jahren zu mehr als einem 80-jährlichen Extremschneeereignis kommt. (☆)

Bei dieser Aufgabenstellung handelt es sich so wie bei der ersten um eine typische Aufgabenstellung, wie sie bei der Behandlung der Binomialverteilung häufig vorkommt. Der Schieberegler muss dafür auf eine Jährlichkeit von $n = 80$ gestellt werden. Es können die Wahrscheinlichkeiten für 2,3,...,80 Extremschneeereignisse abgelesen und addiert werden. Dieser Zugang ist jedoch sehr mühsam, da die Wahrscheinlichkeiten bei hoher Anzahl an Extremschneeereignissen sehr gering werden ($B_{80,\frac{1}{80}}(\{80\}) \approx 10^{-153}$) und insgesamt 79 Werte addiert werden müssen. Mit der Betrachtung der Gegenwahrscheinlichkeit kann diese Aufgabenstellung leichter beantwortet werden. So ist die Wahrscheinlichkeit für mehr als ein Extremschneeereignis äquivalent zu 1 minus der Wahrscheinlichkeit, dass weniger als 2 Extremschneeereignisse auftreten. Die Wahrscheinlichkeiten für kein beziehungsweise ein Extremschneeereignis können abgelesen werden und somit lässt sich eine Wahrscheinlichkeit von 26.42% bestimmen, dass mindestens zwei 80-jährliche

Extremschneeereignisse in 80 Jahren auftreten. Mathematisch kann diese Wahrscheinlichkeit wie folgt beschrieben werden:

$$\begin{aligned} B_{80,\frac{1}{80}}(\{2,3,...,80\}) &= \sum_{k=2}^{80} \binom{80}{k} \cdot \left(\frac{1}{80}\right)^k \cdot \left(\frac{79}{80}\right)^{80-k} = \\ &= 1 - \binom{80}{0} \cdot \left(\frac{1}{80}\right)^0 \cdot \left(\frac{79}{80}\right)^{80} - \binom{80}{1} \cdot \left(\frac{1}{80}\right)^1 \cdot \left(\frac{79}{80}\right)^{79} = \\ &= 0.2642 \end{aligned}$$

Betrachte die Wahrscheinlichkeiten für kein bzw. genau ein Extremschneeereignis.

- Beschreibe in Worten, wie sich die Wahrscheinlichkeiten für kein bzw. genau ein Extremschneeereignis mit steigender Jährlichkeit n verändern. (☆)

Bei dieser Aufgabe soll der Verlauf der Wahrscheinlichkeiten für kein beziehungsweise genau ein Extremschneeereignis mit Variierung der Jährlichkeit n beschrieben werden. Die Jährlichkeit lässt sich wiederum mit dem Schieberegler verändern. Es sollte erkannt werden, dass die Wahrscheinlichkeit mit zunehmender Jährlichkeit n für kein Extremschneeereignis ansteigt und die Wahrscheinlichkeit für genau ein Extremschneeereignis abnimmt. Der Anstieg beziehungsweise das Abnehmen ist bei niedriger Jährlichkeit höher und beide Wahrscheinlichkeiten nähern sich immer mehr an und unterscheiden sich bei einer Jährlichkeit von $n = 100$ nur mehr um $\approx 0.34\%$ bei Wahrscheinlichkeiten knapp unter 37%. Das bedeutet, bei einer Jährlichkeit von 100 Jahren ist das Auftreten von keinem Extremschneeereignis ähnlich wahrscheinlich wie das Auftreten von genau einem Extremschneeereignis.

- Gib eine Vermutung ab, wie hoch die Wahrscheinlichkeiten für eine Jährlichkeit von n=1000 sind. (☆☆)

Die Erkenntnisse der vorherigen Aufgabe sollen in Bereiche mit höheren Jährlichkeiten übertragen werden. Dadurch soll eine erste Vorstellung zur Betrachtung des Grenzwertes der Wahrscheinlichkeiten für $n \to \infty$ entstehen, die bei späteren

Aufgabenstellungen gefragt ist. Unter Annahme einer ähnlichen Entwicklung der Wahrscheinlichkeiten wie im Bereich zwischen 2 und 100 Jahren nähern sich die Wahrscheinlichkeit für kein und für genau ein Extremschneeereignis weiter langsam an. Daher kann die Wahrscheinlichkeit für kein Extremschneereignis zum Beispiel auf $\approx 36.75\%$ und die Wahrscheinlichkeit für genau ein Extremschneeereignis auf $\approx 36.85\%$ geschätzt werden. Natürlich können diese Werte durch Berechnung der Binomialwahrscheinlichkeiten überprüft werden:

$$B_{1000,\frac{1}{1000}}(\{0\}) = \binom{1000}{0} \cdot \left(\frac{1}{1000}\right)^0 \cdot \left(\frac{999}{1000}\right)^{1000} = 0.3677$$
$$B_{1000,\frac{1}{1000}}(\{1\}) = \binom{1000}{1} \cdot \left(\frac{1}{1000}\right)^1 \cdot \left(\frac{999}{1000}\right)^{999} = 0.3681$$

- Schreibe die Binomialwahrscheinlichkeiten $B_{n,p}(\{0\})$ bzw. $B_{n,p}(\{1\})$ mathematisch an. (☆☆)

Die Bearbeitung dieser Aufgabe dient vor allem als Vorbereitung auf die nächste Aufgabe, in der der Grenzwert der Wahrscheinlichkeiten für $n \to \infty$ betrachtet wird. Die Binomialwahrscheinlichkeiten werden ohne Angabe der genauen Jährlichkeiten angeschrieben und können in weiterer Folge vereinfacht werden.

$$B_{n,\frac{1}{n}}(\{0\}) = \binom{n}{0} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^0 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = 1 \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$
$$B_{n,\frac{1}{n}}(\{1\}) = \binom{n}{1} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} = n \cdot \frac{1}{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}$$

- Ermittle den Grenzwert dieser Binomialwahrscheinlichkeiten für $n \to \infty$ und interpretiere ihn im Kontext. (☆☆☆)

Diese Aufgabe benötigt Wissen aus der Analysis über den Grenzwert bestimmter Folgen. Das Ergebnis kann anschließend im stochastischen Kontext interpretiert werden. Dazu werden die in der vorherigen Aufgabe angeschriebenen Wahrscheinlichkeit im Grenzfall $n \to \infty$ betrachtet. Der Grenzwert der Wahrscheinlichkeit für kein Extremschneeereignis kann durch verschiedene Herangehensweisen berechnet werden. Eine mögliche Lösungsart ist, den Grenzwert durch Umschreiben der Folge auf das bekannte Ergebnis $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$ zurückzuführen:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} B_{n,\frac{1}{n}}(\{0\}) = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-(n-1)}} =\\ = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} =\\ = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \overset{m=n-1}{=} \frac{1}{\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m} = \frac{1}{e}\end{aligned}$$

Ein weitere Möglichkeit zur Bestimmung dieses Grenzwerts ist das Wissen über die Definition der Exponentialfunktion als Grenzwert einer Folge:

$$\forall x \in \mathbb{R}: \exp(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

Dabei wird hier als Argument $x = -1$ eingesetzt und es ergibt sich das gleiche Ergebnis wie vorhin:

$$\lim_{n\to\infty} B_{n,\frac{1}{n}}(\{0\}) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{n}\right)^n = \exp(-1) = \frac{1}{e}$$

Mithilfe dieser Lösung kann relativ einfach der Grenzwert der Wahrscheinlichkeit für genau ein Extremschneeereignis berechnet werden:

$$\lim_{n\to\infty} B_{n,\frac{1}{n}}(\{1\}) = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right) = \frac{1}{e}\cdot 1 = \frac{1}{e}$$

Nun kann die anfängliche beobachtete Monotonie der Wahrscheinlichkeit für kein beziehungsweise für genau ein Extremschneeereignis bewiesen werden. Dazu wird benötigt, dass für $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ die Folge $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}$ streng monoton fallend und die Folge $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ streng monoton wachsend in m ist, was mithilfe der Bernoulli-

Ungleichung gezeigt werden kann. Diese beiden Folgen nähern sich mit steigendem m der eulerschen Zahl an. Ausgehend von dieser Ungleichung und der Betrachtung des Kehrwerts kann die Monotonie der beiden betrachteten Folgen bestimmt werden. Für $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt:

$$\underbrace{\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}}_{\text{s. m. fallend}} \geq e \geq \underbrace{\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}}_{\text{s. m. steigend}} \Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}}}_{\text{s. m. steigend}} \leq \frac{1}{e} \leq \underbrace{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}}}_{\text{s. m. fallend}}$$

Anschließend muss nur noch gezeigt werden, dass diese Folgen den von uns betrachteten Folgen für die Wahrscheinlichkeit von keinem beziehungsweise genau einem Extremschneeereignis entsprechen:

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}} = \left(\frac{m+1}{m}\right)^{-(m+1)} \overset{n=m+1}{=} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-n} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$$

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}} = \left(\frac{m+1}{m}\right)^{-m} \overset{n=m+1}{=} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-(n-1)} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}$$

Somit ist gezeigt, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ die Folge $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$ streng monoton steigend und die Folge $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}$ streng monoton fallend ist. Damit kann der Verlauf der Binomialwahrscheinlichkeiten mit steigender Jährlichkeit für kein beziehungsweise genau ein Extremschneeereignis mathematisch begründet werden.

Diese Erkenntnisse aus dem mathematischen Modell können nun interpretiert werden. Die Binomialwahrscheinlichkeiten $B_{n,p}(\{0\})$ und $B_{n,p}(\{1\})$ nähern sich mit zunehmender Jährlichkeit immer weiter an und im Grenzfall $n \to \infty$ haben sie den Wert $\frac{1}{e} = 0.36788$. Demnach ist es gleich wahrscheinlich, dass es zu keinem oder zu genau einem Extremschneeereignis kommt. Das ist vor allem dahingehend interessant und ein wenig paradox, da die Wahrscheinlichkeit so gewählt wurde, dass in Erwartung genau ein Extremschneeereignis in einer Zeitperiode von n Jahren auftritt.

4.3 Abschnitt „Extremwertverteilung“

In diesem Abschnitt wird die Verteilung der Schneehöhenjahresmaxima mit geschätzten Parametern für verschiedene Messstationen in Österreich betrachtet und mit den echten Daten verglichen (siehe Abb. 4.3). Zur Modellierung dieser Problemstellung wird die verallgemeinerte Extremwertverteilung verwendet (siehe Kapitel 2.2).

Diskrete Verteilungen beschränken sich auf Zufallsvariablen, die fast sicher höchstens abzählbar unendlich viele Werte annehmen. Werden jedoch stochastische Aufgabenstellungen mit kontinuierlichen Variablen wie zum Beispiel der Zeit betrachtet, ist es nicht mehr sinnvoll, diese Situationen mit diskreten Verteilungen zu beschreiben. Die Genauigkeit der Zeit ist nur durch die Messtechnik eingeschränkt und sie kann theoretisch jeden Wert in den reellen Zahlen annehmen. Auf viele weitere Zufallsvariablen wie Temperaturen, Längen- oder Höhenangaben trifft dies ebenfalls zu. Aufgrund des häufigen Vorkommens stetiger Zufallsvariablen ist es notwendig, im Unterricht das Konzept der kontinuierlichen Verteilung einzuführen. In der Schule wird wegen ihres großen Anwendungsbereichs meist die Normalverteilung als Beispiel für eine kontinuierliche Verteilung behandelt, da sich die Summe unabhängiger Zufallsvariablen laut zentralem Grenzwertsatz durch sie approximieren lässt (Tietze et al. 2002: 55f). Dennoch ist es wichtig, den SchülerInnen zu vermitteln, dass das Modell der Normalverteilung nicht in jeder Situation passend ist. Im Fall der jährlichen Schneehöhenmaxima wird nicht die Summe, sondern das Maximum der Zufallsvariablen betrachtet. Für diesen Fall ist die Extremwertverteilung ein passendes Modell.

Durch die Verwendung realer Daten wird die Brücke zwischen Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik geschlagen. Die Thematisierung dieses Zusammenhangs ist wichtig, da SchülerInnen statistische Daten häufig getrennt von zufälligen Vorgängen sehen. Mithilfe von Boxplots gelingt es, sich schnell einen guten Überblick über die Datenlage zu verschaffen. Durch Analyse der Daten können in weiterer Folge Hypothesen zur Verteilung dieser Daten entstehen (Biehler und Engel 2015: 238ff). Die Kennzahlen der echten Daten im Boxplot können mit der (theoretischen) Ex-

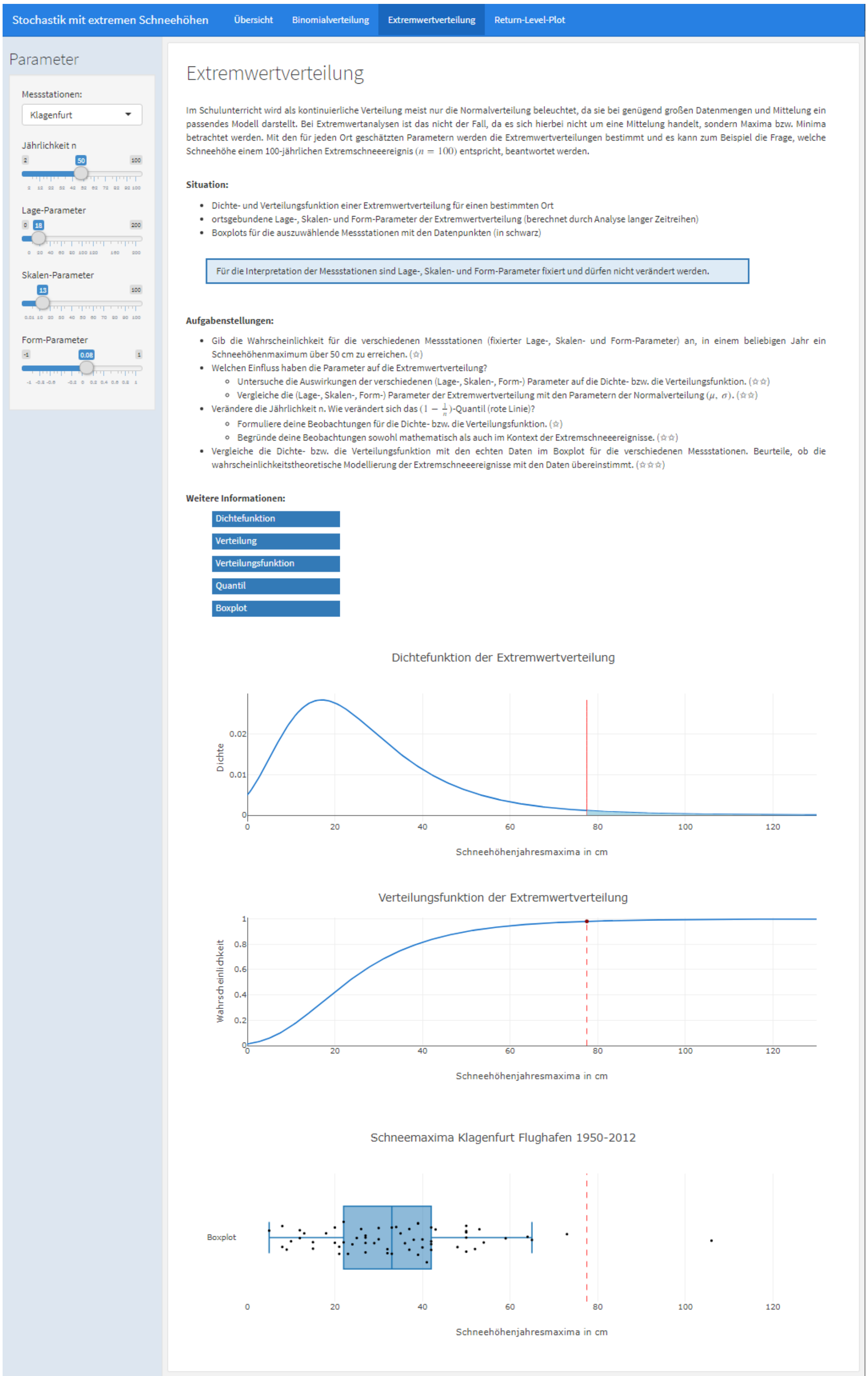

Abb. 4.3: Der Abschnitt „Extremwertverteilung“ der WebApp

tremwertverteilung verglichen werden, wodurch die Modellierung als plausibel oder unplausibel eingestuft werden kann. Eine Überprüfung dieser Hypothesen müsste mit Signifikanztests durchgeführt werden, worauf in diesem Fall verzichtet wird.

Der Abschnitt zur Extremwertverteilung thematisiert die Verteilung der Schneehöhenjahresmaxima an verschiedenen Orten in Österreich. Zu Beginn wird ein anschauliches Beispiel dafür angegeben, welche Fragestellungen mithilfe dieses Abschnitts beantwortet werden können. Anschließend werden die abgebildeten stochastischen Darstellungen wie die Dichte- und Verteilungsfunktion sowie Boxplots mit den Daten der Schneehöhenjahresmaxima für die Messstationen genannt und kurz beschrieben. Die Messstationen können im linken Teil der Seite ausgewählt werden. Dort kann auch wie schon vorher bei der Binomialverteilung mit einem Schieberegler die Jährlichkeit n variiert werden. Außerdem können hier noch der Lage-, Skalen- und Form-Parameter der Extremwertverteilung verändert werden. Die Werte der Parameter definieren die Verteilung der jährlichen Schneehöhenmaxima an einem bestimmten Ort. Werden die Parameter verändert, wird somit ein anderer Ort betrachtet. Theoretisch kann diese Verteilung für jeden Ort in Österreich angegeben werden, die Bestimmung der Parameter ist jedoch schwierig. Für die auszuwählenden Messstationen wurden diese Werte durch Analyse langer Zeitreihen der ZAMG berechnet. Da es bei SchülerInnen dahingehend immer wieder zu Missverständnissen kam, wurde ein Hinweis eingefügt, dass die Parameter bei der Interpretation der Messstationen nicht verändert werden dürfen, da sie sonst die Verteilung an einem anderen Ort betrachten. Sollten die SchülerInnen mathematische Inhalte zur Dichtefunktion, zur Verteilung, zur Verteilungsfunktion, zum Quantil oder zum Boxplot wiederholen wollen, können sie die wichtigsten Aussagen durch Klick auf weitere Informationen nachlesen. Zur Beantwortung von Fragestellungen im Kontext der jährlichen Schneehöhenmaxima müssen in weiterer Folge die Dichte- und Verteilungsfunktion im Kontext interpretiert werden, wodurch der Aufbau von Kompetenzen zur Argumentation mit diesen stochastischen Darstellungen unterstützt wird.

Gib die Wahrscheinlichkeit für die verschiedenen Messstationen (fixierter Lage-, Skalen- und Form-Parameter) an, in einem beliebigen Jahr ein Schneehöhenmaximum über 50 cm zu erreichen. (☆)

Um diese Aufgabenstellung zu beantworten, muss zuerst im linken Teil der Seite eine Messstation wie zum Beispiel Bregenz ausgewählt werden. Die Wahrscheinlichkeit für ein Schneehöhenjahresmaximum über 50 cm entspricht der Fläche unter der Dichtefunktion f im Intervall $[50, \infty)$ und somit dem Integral $P\left([50, \infty) \right) = \int_{50}^{\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$. Der Wert der Fläche kann bei der Dichtefunktion jedoch nicht abgelesen werden. Deshalb wird in einem nächsten Schritt die Verteilungsfunktion betrachtet, die die kumulierten Wahrscheinlichkeiten darstellt. Dabei kann bei 50 cm ein Wert von 0.9295 abgelesen werden, was die Wahrscheinlichkeit für ein Schneehöhenjahresmaximum unter 50 cm ist. Die Frage lautet aber, wie wahrscheinlich ein Schneehöhenjahresmaximum über 50 cm ist und dafür muss die Gegenwahrscheinlichkeit betrachtet werden:

$$P_{\text{Bregenz}}\left([50, \infty) \right) = 1 - \int_{-\infty}^{50} f(t)\ \mathrm{d}t = 1 - 0.9295 = 0.0705$$

Somit gibt es in Bregenz in einem beliebigen Jahr mit 7.05%iger Wahrscheinlichkeit ein Schneehöhenjahresmaximum von mehr als 50 cm. Bei den anderen Messstationen lässt sich dieser Wert auf die gleiche Art und Weise ablesen und berechnen:

$$P_{\text{Jenbach}}\left([50, \infty) \right) = 1 - 0.8203 = 0.1797$$
$$P_{\text{Klagenfurt}}\left([50, \infty) \right) = 1 - 0.8997 = 0.1003$$
$$P_{\text{Linz}}\left([50, \infty) \right) = 1 - 0.9793 = 0.0207$$
$$P_{\text{Rust}}\left([50, \infty) \right) = 1 - 0.9842 = 0.0158$$
$$P_{\text{Spielberg}}\left([50, \infty) \right) = 1 - 0.9677 = 0.0323$$
$$P_{\text{Stubaier Gletscher}}\left([50, \infty) \right) = 1 - 0.0193 = 0.9807$$
$$P_{\text{Wien}}\left([50, \infty) \right) = 1 - 0.9892 = 0.0108$$

Welchen Einfluss haben die Parameter auf die Extremwertverteilung?
- Untersuche die Auswirkungen der verschiedenen (Lage-, Skalen-, Form-) Parameter auf die Dichte- bzw. die Verteilungsfunktion. (☆☆)

Ziel dieser Aufgabe ist es, die Parameter der Extremwertverteilung genauer zu verstehen. Am leichtesten gelingt dies, wenn nur ein Parameter mit dem Schieberegler verändert wird und die zwei anderen gleich gelassen werden. Durch das Verändern des Lage-Parameters lässt sich erkennen, dass sich sowohl die Dichte- als auch die Verteilungsfunktion auf der horizontalen Achse verschieben ohne die Form zu ändern. Je höher der Lage-Parameter ist, desto größer ist auch die Wahrscheinlichkeit für größere jährliche Schneehöhenmaxima. Das Maximum der Dichtefunktion befindet sich dabei in etwa bei einem Schneehöhenjahresmaximum, das dem Wert des Lage-Parameters entspricht. Somit beschreibt der Lage-Parameter das Zentrum der Verteilung.

Wird der Skalen-Parameter verändert, ändert sich die Breite der Verteilung. Je kleiner der Skalen-Parameter ist, desto steiler ist die Verteilungsfunktion beziehungsweise desto schmaler ist die Dichtefunktion. Mit größerem Skalen-Parameter streuen die Schneehöhenjahresmaxima mehr um das Zentrum der Verteilung.

Wird der Form-Parameter variiert, verändert sich die Form der Verteilung. Je größer der Wert des Form-Parameters ist, desto flacher verläuft die Dichtefunktion am rechten Rand beziehungsweise desto langsamer nähert sich die Verteilungsfunktion dem Wert 1 an. Befindet sich der Form-Parameter im negativen Bereich, fällt die Dichtefunktion am rechten Rand stark ab und nimmt Werte oberhalb dieser Schranke nur mehr mit Wahrscheinlichkeit 0 an.

- Vergleiche die (Lage-, Skalen-, Form-) Parameter der Extremwertverteilung mit den Parametern der Normalverteilung (μ, σ). (☆☆)

Da der Lage-Parameter das Zentrum der Verteilung charakterisiert, kann er mit dem Erwartungswert der Verteilung in Verbindung gebracht und somit als das Pendant zum μ der Normalverteilung gesehen werden. Der Skalen-Parameter ist in einer Näherung die Standardabweichung der Extremwertverteilung und ist damit ähnlich zum σ der Normalverteilung. Beim Lage- und Skalen-Parameter handelt es sich nicht genau um den Erwartungswert und die Standardabweichung der Extremwertverteilung, jedoch ist die Abweichung gering und diese Interpretation ist im Schulunterricht ausreichend.

Der Form-Parameter gibt die Form und das Randverhalten der Extremwertverteilung an. Dadurch entsteht eine Asymmetrie dieser Verteilung. Da die Normalverteilung mit der Dichtefunktion in Form der Gauß'schen Glockenkurve immer symmetrisch ist, kann der Form-Parameter nicht mit der Normalverteilung in Verbindung gebracht werden.

Verändere die Jährlichkeit n. Wie verändert sich das $(1 - \frac{1}{n})$-Quantil (rote Linie)?

- Formuliere deine Beobachtungen für die Dichte- bzw. die Verteilungsfunktion. (☆)

Diese Aufgabe hilft dabei, das $(1 - \frac{1}{n})$-Quantil, welches jene Schneehöhe angibt, die für ein n-jährliches Extremschneeereignis überschritten werden muss, besser zu verstehen. Dazu wird die Jährlichkeit n variiert und die Änderungen des Quantils beobachtet. Bei der Dichtefunktion verschiebt sich das Quantil mit zunehmender Jährlichkeit in Richtung größerer Schneehöhen. Bei der Verteilungsfunktion verschiebt sich das Quantil ebenfalls nach rechts. Durch den Zusammenhang von Dichte- und Verteilungsfunktion ist es nicht verwunderlich, dass die gleiche Tendenz erkennbar ist. Der Wert des $(1 - \frac{1}{n})$-Quantils wird somit mit zunehmender Jährlichkeit n größer.

- Begründe deine Beobachtungen sowohl mathematisch als auch im Kontext der Extremschneeereignisse. (☆☆)

Das Quantil ist so definiert, dass Werte mit einer Wahrscheinlichkeit von $(1 - \frac{1}{n})$ kleiner und mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{n}$ größer als das Quantil angenommen werden. Da die Jährlichkeit n größer wird, wird der Wert $\frac{1}{n}$ und damit die rechts vom Quantil eingeschlossene Fläche unter der Dichtefunktion kleiner. Wird die Verteilungsfunktion betrachtet, lässt sich der Verlauf so erklären, dass durch die monton wachsende Verteilungsfunktion und dem steigenden Funktionswert $(1-\frac{1}{n})$ auch das zugehörige Argument und somit das Quantil gleich bleibt oder größer wird. Diese Überlegungen haben zur Folge, dass sich das Quantil nach rechts verschiebt und einen höheren Wert annehmen muss. Formal ist zu zeigen, dass für Jährlichkeiten $m, n \in \mathbb{N}$ und Quantile $x, y \in \mathbb{R}$ mit $F(x) = 1-\frac{1}{m}$ und $F(y) = 1-\frac{1}{n}$ gilt: $m \geq n \Rightarrow x \geq y$

$$m \geq n \quad \Rightarrow \quad 1-\frac{1}{m} \geq 1-\frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad F(x) \geq F(y) \quad \Rightarrow$$
$$\overset{F^{-1}\text{ m. steigend}}{\Rightarrow} \quad F^{-1}(F(x)) \geq F^{-1}(F(y)) \quad \Rightarrow \quad x \geq y$$

Im Kontext kann man den Verlauf des Quantils so argumentieren, dass die Schneehöhenjahresmaxima nur einmal in n Jahren den Wert des Quantils übersteigen sollen. Vergleicht man zum Beispiel 40-jährliche und 80-jährliche Extremschneeereignisse, dann sollte das $(1-\frac{1}{80})$-Quantil in Erwartung nur einmal, das $(1-\frac{1}{40})$-Quantil jedoch zwei Mal in 80 Jahren überschritten werden. Daher müssen zum Beispiel für ein 80-jährliches Extremschneeereignis höhere Schneehöhen gemessen werden wie für ein 40-jährliches. Diese Überlegung lässt sich auf alle Jährlichkeiten übertragen und somit muss das $(1-\frac{1}{n})$-Quantil mit zunehmender Jährlichkeit ansteigen.

Vergleiche die Dichte- bzw. die Verteilungsfunktion mit den echten Daten im Boxplot für die verschiedenen Messstationen. Beurteile, ob die wahrscheinlichkeitstheoretische Modellierung der Extremschneeereignisse mit den Daten übereinstimmt. (☆☆☆)

Bei dieser Aufgabe soll die Plausibilität der Modellierung mit der Extremwertverteilung und den geschätzten Parametern für die verschiedenen Messstationen überprüft werden. Somit wird eine Verbindung zwischen dem Modell aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung und den realen Daten aus der Statistik hergestellt. Eine

Möglichkeit der Bewertung des Modells ist, zu betrachten, inwiefern der Boxplot und insbesondere die Box zwischen dem ersten und dem dritten Quartil mit dem Zentrum der Dichte- beziehungsweise der Verteilungsfunktion übereinstimmt. Eine weitere Möglichkeit ist, die Anzahl der Extremschneeereignisse im Zeitraum der Aufzeichnungen zu betrachten. In Erwartung tritt im entsprechenden Messzeitraum von n Jahren genau ein n-jährliches Extremschneeereignis auf, also ein Schneehöhenjahresmaximum, welches einen höheren Wert als das $(1 - \frac{1}{n})$-Quantil der Extremwertverteilung hat. Dabei gilt es jedoch die Erkenntnisse aus dem Abschnitt „Binomialverteilung“ zu beachten, dass es fast gleich wahrscheinlich ist, dass kein Extremschneeereignis in der entsprechenden Zeitspanne auftritt. Auch das Auftreten von zwei Extremschneeereignissen hat eine nicht vernachlässigbare Wahrscheinlichkeit. Mehr als zwei Extremschneeereignisse treten nur mehr mit einer geringen Wahrscheinlichkeit auf. Im Folgenden wird diese Argumentation an zwei Beispielen dargestellt.

Von der Messstation in Bregenz gibt es Messwerte im Zeitraum von 1984 bis 2013, also von 30 Jahren. Wird die Jährlichkeit auf $n = 30$ gestellt, kann das $(1 - \frac{1}{30})$-Quantil mit einem Wert von 68.68 cm abgelesen werden. In einem Jahr wurde dieser Wert mit einem Schneehöhenjahresmaximum von 70 cm überschritten. Es gab daher ein 30-jährliches Extremschneeereignis. Im Boxplot zeigt sich eine leichte Asymmetrie der Box mit größerer Streuung hin zu größeren Werten, ähnlich wie beim Verlauf der Dichtefunktion. Der Median des Datensatzes von 22 cm stimmt gut mit dem 0.5-Quantil der Verteilung von 22.09 cm überein. Das erste Quartil der Daten liegt bei 16 cm, das dritte bei 39 cm und weicht nicht weit vom 0.25-Quantil (14.45 cm) beziehungsweise 0.75-Quantil (32.41 cm) der Extremwertverteilung ab. Aus den genannten Gründen kann davon ausgegangen werden, dass die Modellierung für Bregenz passend ist.

Von der Messstation in Spielberg sind im Zeitraum von 1962 bis 2012, also von 51 Jahren, Daten über die Schneehöhenjahresmaxima verfügbar. Das $(1 - \frac{1}{51})$-Quantil der Extremwertverteilung mit einem Wert von 56.33 cm wurde im Messzeitraum fünf Mal überschritten. Die Wahrscheinlichkeit von fünf Extremschneeereignissen in 51 Jahren liegt bei rund 0.03%. Die Verteilung der Daten im Boxplot weicht stark von der theoretischen Verteilung ab. Zum Beispiel liegt der Median der Daten mit 29 cm über dem 0.75-Quantil (25.87 cm) der Verteilung. Deshalb ist es für Spielberg nicht plausibel, dass die wahrscheinlichkeitstheoretische Modellierung passend ist.

Bei den anderen Messstationen kam es in den entsprechenden Zeiträumen zu keinem, einem oder zwei Extremschneeereignissen und die Boxplots weichen nicht außergewöhnlich von den Extremwertverteilungen ab, wodurch eine Übereinstimmung der wahrscheinlichkeitstheoretischen Modellierung mit den Daten plausibel erscheint. Um eine Aussage über die Signifikanz treffen zu können, müssten in weiterer Folge statistische Tests angewandt werden.

4.4 Abschnitt „Return-Level-Plot“

In diesem Abschnitt wird betrachtet, welchen Wert ein Schneehöhenjahresmaximum überschreiten muss, um von einem Extremschneeereignis zu sprechen. Dafür werden die Return-Levels, also die $(1 - \frac{1}{n})$-Quantile der Extremwertverteilung, für die verschiedenen Messstationen in Abhängigkeit von der Jährlichkeit n in einem sogenannten Return-Level-Plot dargestellt. Außerdem wird die räumliche Verteilung der Schneehöhen in Österreich anhand der in einer Karte dargestellten Return-Levels thematisiert (siehe Abb. 4.4). Mithilfe von Return-Level-Plots kann das Modell rasch validiert und interpretiert werden. Die Jährlichkeit n wird häufig logarithmisch aufgetragen, da so das Randverhalten der Verteilung aus dem Return-Level-Plot abgelesen und damit den drei Typen der Extremwertverteilung (Weibull, Gumbel, Fréchet) zugeordnet werden kann (Coles 2001: 49).

Mit Return-Level-Plots lernen SchülerInnen eine weitere Möglichkeit kennen, eine Wahrscheinlichkeitsverteilung darzustellen, mittels Quantilen. Zudem befassen sich SchülerInnen dadurch mit einer logarithmischen Achsenskalierung, welche in den Naturwissenschaften weit verbreitet ist. Mit dieser Darstellung lassen sich vor allem exponentielle Zusammenhänge besser abbilden. Die intensive Beschäftigung mit Quantilen hilft in weiterer Folge beim Übergang von beschreibender

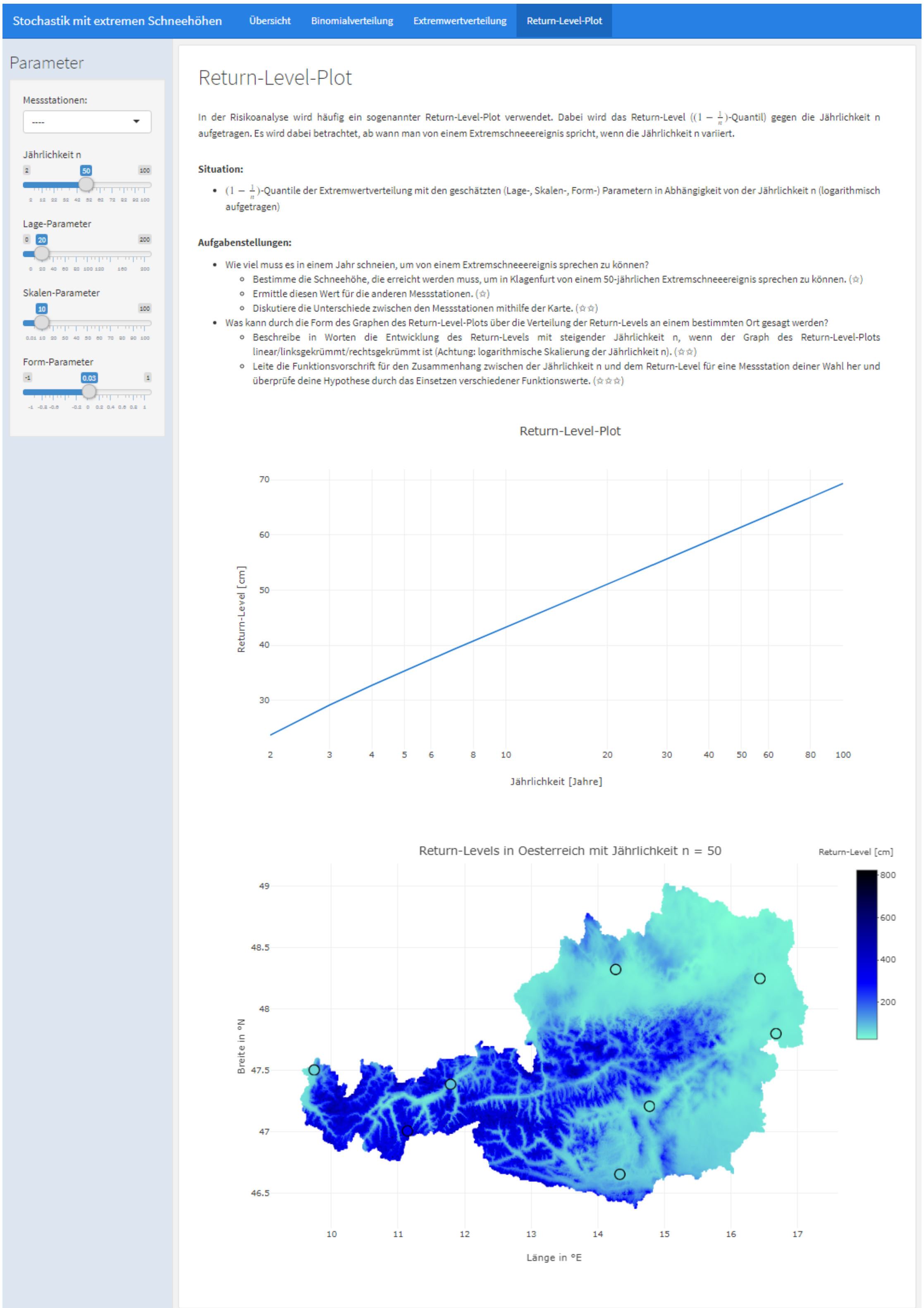

Abb. 4.4: Der Abschnitt „Return-Level-Plot“ der WebApp

zu beurteilender Statistik. Durch das tiefere Verständnis von Quantilen können Konfidenzintervalle einfacher berechnet und besser verstanden werden. Außerdem werden Quantile beim statistischen Testen und insbesondere zur Bestimmung des kritischen Bereichs bei Hypothesentests benötigt (Mittag 2017: 186f).

Der Aufbau dieses Abschnitts ist ähnlich zu den vorangegangenen. Nach einer kurzen Einführung wird die dargestellte Situation beschrieben. Der Return-Level-Plot ist von den Parametern der Extremwertverteilung abhängig. Im linken Teil der Seite können diese mithilfe von Schiebereglern eingestellt und verschiedene Messstationen ausgewählt werden. Daraufhin werden die ortsgebundenen Parameter abgerufen und der Return-Level-Plot für die entsprechenden Orte dargestellt. Die Karte mit den Return-Levels kann mithilfe der Jährlichkeit n verändert werden. Um die Messstationen leichter zu lokalisieren, sind sie mit einem Kreis markiert. Mithilfe dieser beiden Darstellungen können die folgenden Aufgabenstellungen bearbeitet werden.

Wie viel muss es in einem Jahr schneien, um von einem Extremschneeereignis sprechen zu können?

- Bestimme die Schneehöhe, die erreicht werden muss, um in Klagenfurt von einem 50-jährlichen Extremschneeereignis sprechen zu können. (☆)

Diese Aufgabenstellung dient zum Kennenlernen des Return-Level-Plots und der Karte mit den Return-Levels von Österreich und zeigt die Vorteile dieser Darstellungen, da sie einfach interpretiert werden können. Zur Bearbeitung dieser Aufgabe muss im linken Teil der Seite die Messstation Klagenfurt ausgewählt werden. Anschließend kann im Return-Level-Plot das $(1 - \frac{1}{n})$-Quantil zur Jährlichkeit $n = 50$ mit 77.53 cm abgelesen werden. Das bedeutet, wenn in Klagenfurt in einem Jahr die Schneehöhe den Wert von 77.53 cm überschreitet, wird von einem 50-jährlichen Extremschneeereignis gesprochen. Wird die Jährlichkeit auf $n = 50$ gestellt, kann dieser Wert mit der Karte überprüft werden, wobei hier aufgrund des kleinen Maßstabs keine genaue Ablesung möglich ist.

- Ermittle diesen Wert für die anderen Messstationen. (☆)

Die Return-Levels für die anderen Messstationen können auf die gleiche Art und Weise wie bei der letzten Aufgabe ermittelt werden. Überschreitet die Schneehöhe an den folgenden Orten den Wert des Return-Levels für $n = 50$, dann wird von einem 50-jährlichem Extremschneeereignis gesprochen:

- Bregenz: 68.38 cm
- Jenbach: 88.82 cm
- Linz: 50.40 cm
- Rust/Neusiedlersee: 47.18 cm
- Spielberg: 56.07 cm
- Stubaier Gletscher: 331.11 cm
- Wien: 43.41 cm

- Diskutiere die Unterschiede zwischen den Messstationen mithilfe der Karte. (☆☆)

Durch diese Aufgabe beschäftigen sich SchülerInnen genauer mit der Karte und mit der räumlichen Verteilung der Return-Levels in Österreich. Die Schneehöhe ist stark abhängig von der Lufttemperatur und somit von der Seehöhe. Dies kann auf der Karte gut erkannt werden, da die großen Täler im alpinen Raum deutlich erkennbar sind wie zum Beispiel das Inntal in Tirol oder das Drautal in Osttirol und Oberkärnten. Außerdem ist die Schneehöhe abhängig von den Hauptströmungsrichtungen, da feuchte Luftmassen häufig aus maritimen Bereichen kommen, an den Alpen zum Aufsteigen gezwungen werden, dort kondensieren und es zu Niederschlägen kommt. Die größten Niederschläge, bei entsprechend tiefen Temperaturen in Form von Schnee, gibt es daher am Alpenhauptkamm, bei West- bis Nordwestwetterlagen in den Nordalpen in Vorarlberg, Tirol und Salzburg. Bei Anströmung aus dem Mittelmeerraum schneit es am meisten entlang der Südalpen in Osttirol und Kärnten (Auer et al. 2001). Mithilfe der beiden genannten Gründe kann das starke West-Ost-Gefälle der Return-Levels erklärt werden. Damit lässt sich begründen, warum es zum Beispiel in Bregenz und Jenbach deutlich größere Schneehöhenjahresmaxima als in Linz, Rust oder Wien benötigt, um von einem 50-jährlichen Extremschneeereignis zu sprechen. Die Station im Skigebiet Stubaier Gletscher auf über 2000 m Seehöhe weist die höchsten Werte der angegebenen Messstationen auf, im Gebirgsraum können die Return-Levels jedoch aufgrund der großen Höhendifferenzen über kurze Horizontalentfernungen große Unterschiede aufweisen.

Was kann durch die Form des Graphen des Return-Level-Plots über die Verteilung der Return-Levels an einem bestimmten Ort gesagt werden?

- Beschreibe in Worten die Entwicklung des Return-Levels mit steigender Jährlichkeit n, wenn der Graph des Return-Level-Plots linear/linksgekrümmt/rechtsgekrümmt ist (Achtung: logarithmische Skalierung der Jährlichkeit n). (☆☆)

Durch den Verlauf des Graphen des Return-Level-Plots kann auf die Verteilung geschlossen werden. Die Krümmung ändert sich dabei mit dem Form-Parameter, der das Randverhalten der Extremwertverteilung beschreibt.

Ein linearer Graph ergibt sich bei einem Form-Parameter von 0, es handelt sich um eine Gumbel-Verteilung. Aufgrund der logarithmischen Skalierung der Jährlichkeit bedeutet das jedoch nicht, dass die Return-Levels linear mit der Jährlichkeit zunehmen, sondern diese steigen mit Zunahme der Jährlichkeit logarithmisch an. Dies bedeutet, dass bei niedrigerer Jährlichkeit ein großer Anstieg der Return-Levels erfolgt, der bei höheren Jährlichkeiten abflacht. Zum Beispiel sind die Differenzen der Return-Levels zwischen einem 2- und 3-jährlichen Extremschneeereignis deutlich größer als zwischen einem 99- und 100-jährlichen.

Ein positiver Form-Parameter ergibt einen linksgekrümmten Graphen. Dieser ist umso mehr nach links gekrümmt, je größer der Form-Parameter ist. Die Verteilung kann dem Fréchet-Typ zugeordnet werden. Bei einem Form-Parameter von 1 steigen bei diesem Verteilungstyp die Return-Levels mit Zunahme der Jährlichkeit nahezu linear an, wodurch die Return-Levels sehr hohe Werte erreichen.

Ein rechtsgekrümmter Graph ergibt sich bei einem negativen Form-Parameter. Dabei handelt es sich um eine Weibull-Verteilung. Die Return-Levels steigen bei niedrigeren Jährlichkeiten an und der Graph flacht bei größeren Jährlichkeiten stark ab. Dies lässt auf eine obere Schranke der Wahrscheinlichkeitsverteilung schließen, über der Werte mit einer Wahrscheinlichkeit nahe 0 vorkommen. Deshalb gibt es zum Beispiel nur mehr geringe Unterschiede in den Return-Levels zwischen einem 50- und einem 100-jährlichem Extremschneeereignis.

- Leite die Funktionsvorschrift für den Zusammenhang zwischen der Jährlichkeit n und dem Return-Level für eine Messstation deiner Wahl her und überprüfe deine Hypothese durch das Einsetzen verschiedener Funktionswerte. (☆☆☆)

Bei dieser Aufgabe wird der zuvor nur verbal formulierte Zusammenhang zwischen der Jährlichkeit und den Return-Levels durch eine explizite Funktionsvorschrift beschrieben. Die Vorgangsweise wird anhand der Messstation in Jenbach gezeigt. Aufgrund des Form-Parameters von 0.07, der sehr nahe bei 0 ist, ist der Graph des Return-Level-Plots annähernd linear. Somit kann für das Return-Level die Funktion $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aufgrund der logarithmischen Darstellung der Jährlichkeit mit $x = \log(n)$ und Konstanten $k, d \in \mathbb{R}$ aufgestellt werden:

$$r(x) = k \cdot x + d \quad \Leftrightarrow \quad r(n) = k \cdot \log(n) + d$$

Im nächsten Schritt müssen die Konstanten bestimmt werden. Die Bestimmung der Steigung k kann mithilfe des Differenzenquotienten bestimmt werden. Da der dekadische Logarithmus benutzt wird, bietet es sich an, die Differenz der Jährlichkeiten $n = 100$ und $n = 10$ zu verwenden:

$$k = \frac{r(100) - r(10)}{\log(100) - \log(10)} = \frac{101.98 - 60.12}{2 - 1} = \frac{41.86}{1} = 41.866$$

Die Konstante d kann nun einfach berechnet werden:

$$d = r(n) - k \cdot \log(n) \quad \overset{r(10)=60.12}{\Rightarrow} \quad d = 60.12 - 41.86 \cdot 1 = 18.26$$

Eine äquivalente Vorgehensweise ist die Lösung des folgenden Gleichungssystems:

$$k \cdot \log(10) + d = 60.12$$
$$k \cdot \log(100) + d = 101.98$$

Es ergibt sich für die Return-Levels von Jenbach folgende Funktionsvorschrift:

$$r_{\text{Jenbach}}(n) = 41.86 \cdot \log(n) + 18.26$$

Zur Überprüfung können verschiedene Jährlichkeiten in die ermittelte Funktionsvorschrift eingesetzt und mit den Werten aus dem Return-Level-Plot verglichen werden.

- Jährlichkeit $n = 5$: Funktion: 47.52 cm, Return-Level-Plot: 48.14 cm
- Jährlichkeit $n = 40$: Funktion: 85.32 cm, Return-Level-Plot: 84.70 cm
- Jährlichkeit $n = 70$: Funktion: 95.50 cm, Return-Level-Plot: 95.13 cm

Die ermittelten Funktionswerte sind ähnlich zu den abgelesenen Werten aus dem Return-Level-Plot. Somit erscheint die Modellierung angemessen. Die geringen Abweichungen der Werte lassen sich durch die leichte Linkskrümmung des Graphen des Return-Level-Plots bei einem Form-Parameter von 0.07 erklären.

Bei den anderen Messstationen sind die Graphen der Return-Level-Plots in gewisser Näherung ebenfalls linear. Es kann daher dieselbe Vorgehensweise angewandt werden und es ergeben sich folgende Funktionsvorschriften:

$$
\begin{gathered}
r_{\text{Bregenz}}(n) = 34.05 \cdot \log(n) + 11.07 \\
r_{\text{Klagenfurt}}(n) = 40.24 \cdot \log(n) + 9.81 \\
r_{\text{Linz}}(n) = 25.63 \cdot \log(n) + 7.33 \\
r_{\text{Rust}}(n) = 26.54 \cdot \log(n) + 2.65 \\
r_{\text{Spielberg}}(n) = 28.84 \cdot \log(n) + 7.61 \\
r_{\text{Stubai}}(n) = 80.43 \cdot \log(n) + 190.59 \\
r_{\text{Wien}}(n) = 23.22 \cdot \log(n) + 4.45
\end{gathered}
$$

5 Evaluierung der WebApp

Die WebApp wurde mit drei SchülerInnen einer siebten Klasse und zwei Lehrpersonen einer allgemeinbildenden höheren Schule erprobt. Dabei wurde die Methode des lauten Denkens angewandt, welche zur Analyse von Denk-, Lern- und Problemlöseprozessen verwendet wird. Bei dieser Methode werden alle Gedanken von den Probanden laut ausgesprochen. Damit soll der Zugang zu kognitiven Prozessen ermöglicht werden (Sandmann 2014: 179f). Ziel ist es, missverständliche Formulierungen und Unklarheiten in den Aufgabenstellungen sichtbar zu machen, um die WebApp zu optimieren und mögliche Einsatzformen im Unterricht herauszufinden.

Zu Beginn der Testung erhielten sowohl die SchülerInnen als auch die Lehrpersonen eine kurze Einführung, welche Inhalte in der WebApp vorkommen und welchen Zweck diese verfolgt. Die SchülerInnen bekamen zusätzlich Informationen zu kontinuierlichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen, da diese laut Lehrplan erst in der achten Klasse AHS vorgesehen sind. Die ProbandInnen wurden aufgefordert, die WebApp durchzuarbeiten und alle Gedanken zu äußern, die ihnen dabei durch den Kopf gehen. Die Testung dauerte ungefähr eine Stunde. Anschließend wurden die ProbandInnen anhand eines einheitlichen Leitfadens interviewt. Sowohl das laute Denken als auch die Interviews wurden mit Audio-Aufnahmegeräten aufgenommen, transkribiert und sind im Anhang (siehe Kap. **??**) angeführt. In den folgenden zwei Kapiteln werden die wichtigsten Gedanken von den SchülerInnen und den Lehrpersonen nach den Kategorien Aufbau und Bedienung, Schwierigkeiten und darauffolgende Maßnahmen und Einsatz im Unterricht analysiert.

5.1 Evaluierung mit SchülerInnen

Hinsichtlich des Aufbaus und der Bedienung der WebApp wurden von allen SchülerInnen die gute Übersichtlichkeit und die logische Gliederung genannt. Um die Übersichtlichkeit trotzdem zu verbessern, wurde der Vorschlag von SchülerIn 3 umgesetzt, zu Beginn jedes Abschnitts die jeweilige Überschrift anzubringen. Die Bedienung der Graphen mithilfe der Schieberegler stellte für niemanden ein Problem dar. SchülerIn 2 hob zudem positiv hervor, dass Funktionswerte beim Anklicken der Graphen angezeigt werden, wodurch die Bearbeitung der Aufgabenstellungen erleichtert wird. Die zusätzlichen Informationen zu stochastischen Themenbereichen wurden gut angenommen und zum Nachschauen unbekannter Begriffe genützt. Zum Teil kam es zu langen Ladezeiten der Graphen, die vermutlich auf die langsamen Schulcomputer zurückzuführen sind. Um Klarheit darüber zu schaffen, dass die Graphik noch geladen werden muss, wurde der Text „Loading...“ eingefügt. Von allen SchülerInnen wurde eine Zusammenfassung der gelernten Inhalte gewünscht. Auf diese wurde absichtlich verzichtet, da die SchülerInnen solch eine Zusammenfassung nach Beantwortung der Aufgabenstellungen zum Beispiel im Rahmen einer Projektarbeit selbst verfassen könnten. Dies würde dazu beitragen, dass die SchülerInnen deutlicher erkennen, was sie durch die Bearbeitung der WebApp gelernt haben. Außerdem hätte SchülerIn 1 gerne Lösungen zu den Aufgabenstellungen gehabt, um ihre Antworten auf Richtigkeit zu überprüfen. Darauf wurde ebenfalls absichtlich verzichtet, da so die Arbeiten der SchülerInnen in die Benotung miteinbezogen und die Lösungen im Klassenplenum diskutiert werden können.

Schwierigkeiten bei der Verwendung der WebApp traten vor allem durch Unklarheiten bei den Aufgabenstellungen auf, woraufhin Formulierungen an einzelnen Stellen geändert wurden. Alle SchülerInnen hatten Probleme bei der Interpretation der Parameter der Extremwertverteilung, da nicht klar ersichtlich war, dass diese die Wahrscheinlichkeitsverteilung für einen bestimmten Ort definieren. Darum wurde dies in der Situationsbeschreibung deutlicher beschrieben und zusätzlich in einem blauen Kasten vermerkt, dass die Parameter bei Auswahl einer Messstation fixiert sind und nicht verändert werden dürfen. Es kam zu Schwierigkeiten bei der Interpretation der Dichte- und der Verteilungsfunktion, was jedoch darauf zurückzuführen ist, dass die SchülerInnen diese Inhalte noch nicht im Unterricht besprochen haben. Außerdem wurde sowohl von SchülerIn 1 als auch von SchülerIn 3 angemerkt, dass keine Definitionen des n-jährlichen Extremschneeereignisses und des Return-Levels angegeben sind, woraufhin diese ergänzt wurden. Bei der Karte im Abschnitt Return-Level-Plot wurde die Einheit Zentimeter hinzugefügt, nachdem alle SchülerInnen feststellten, dass diese fehlte. Außerdem wurde auf Anregung von SchülerIn 1 die Farbgebung von einer divergierenden Rot-Blau-Skala in aufsteigende Blaustufen geändert, da dies zu weniger Verwirrungen führt und besser zum Thema Extremschneeereignisse passt. Zusätzlich wurden die auszuwählenden Messstationen zur besseren Orientierung auf der Karte mit einem Kreis hervorgehoben.

Hinsichtlich des Einsatzes der WebApp gaben alle SchülerInnen an, dass der mathematische Hintergrund vor der Bearbeitung der WebApp im Unterricht behandelt werden sollte, da so die Konzentration auf die Beantwortung der Aufgabenstellungen im Kontext der extremen Schneehöhen gelegt werden kann. Dennoch waren die Aufgaben für alle SchülerInnen lösbar, da sie die fehlenden Informationen unter den bereitgestellten Punkten nachlesen konnten. Jedoch nahm dies viel Zeit in Anspruch. SchülerIn 1 konnte anhand der Beschreibungen und Beispiele die Relevanz des Themas Extremschneeereignisse in der Realität erkennen und äußerte sich positiv gegenüber den Aufgabenstellungen, die Interpretationen erfordern. SchülerIn 2 fand es gut, dass die Modellierung ein Stück weit sichtbar gemacht wurde und die Daten nicht „auf einem Silbertablett präsentiert" wurden. Außerdem bevorzugte SchülerIn 2 die interaktive Erarbeitung des Themas mit dem Computer, da Veränderungen an Graphen besser ersichtlich sind als beim Eintippen verschiedener Werte in einen Taschenrechner.

5.2 Evaluierung mit Lehrpersonen

Beide Lehrpersonen fanden die WebApp sowohl optisch als auch wegen des alltagsrelevanten Themas ansprechend. Das Niveau und die Sprache wurden als angemessen für die Schulstufe empfunden. Die WebApp sei sehr übersichtlich, vor allem die

Unterteilung in einzelne Tabs bringe eine gewisse Struktur hinein. Lehrperson 1 beschrieb die WebApp als selbsterklärend, sodass sich die SchülerInnen selbstständig ohne weitere Erklärungen damit beschäftigen könnten. Lehrperson 2 fand es gut, dass die Aufgabenstellungen mit leichteren Fragen starten und dann komplexer werden, jedoch sollten diese zur besseren Übersichtlichkeit in Unterfragen aufgeteilt werden. Außerdem wurde vorgeschlagen, zur Motivation der SchülerInnen den Aufgaben Schwierigkeitsgrade zuzuordnen. Die Einteilung der Schwierigkeitsgrade wurde mit Stern-Symbolen und Operatoren durchgeführt. Beide Lehrpersonen wünschten sich noch weitere Informationen zu den Schiebereglern, weshalb diese genauer in der Situationsbeschreibung erklärt wurden.

Bei den Evaluierungen mit beiden Lehrpersonen konnten einige Formulierungen gefunden werden, die zu Schwierigkeiten bei den SchülerInnen führen könnten. Deshalb wurden diese geändert, damit die Aufgabenstellungen von allen SchülerInnen richtig bearbeitet werden können. Außerdem kam es wie bei den SchülerInnen zu Verständnisproblemen bei den Parametern der Extremwertverteilung, weshalb die schon zuvor angesprochenen Maßnahmen ergriffen wurden.

Der Einsatz der WebApp im Unterricht erschien beiden Lehrpersonen als sehr sinnvoll. Sie sprachen sich für die Verwendung der WebApp nach der Besprechung der Normalverteilung als Wiederholung der stochastischen Konzepte mit einem Anwendungsbeispiel aus der Realität aus. Zusätzlich gäbe es mit der Extremwertverteilung vertiefende Inhalte, die den SchülerInnen interessante Felder der Mathematik aufzeigen. Lehrperson 1 konnte sich im Gegensatz zu Lehrperson 2 die WebApp auch als Einstieg in stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen ohne vorherige Behandlung der Normalverteilung vorstellen. Beide waren sich einig, dass die WebApp eine gute Möglichkeit für fächerübergreifenden Unterricht mit dem Fach Geographie darstelle. Im Anschluss an die Bearbeitung der WebApp könnten laut Lehrperson 1 aufgrund der offenen Aufgabenstellungen, die verschiedene Interpretationen zulassen, Diskussionen geführt werden. Damit würden die SchülerInnen Mathematik als Fach kennenlernen, welches verschiedene Sichtweisen zulasse. Lehrperson 2 sprach die Vernetzung von Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik in der WebApp an. Es sei wichtig, diese Teilbereiche der Mathematik im

Unterricht häufiger miteinander zu verbinden, was mittlerweile auch bei Aufgaben der standardisierten Reife- und Diplomprüfung vermehrt versucht würde. Außerdem hob Lehrperson 1 besonders hervor, dass durch die WebApp eine weitere stetige Verteilung kennengelernt wird. Beide Lehrpersonen waren sich einig, dass die SchülerInnen von der realen Anwendungssituation profitieren und das Interesse für Mathematik geweckt werden könnte.

Probleme bei der Bearbeitung der WebApp sah Lehrperson 1 vor allem in der Anwendungssituation. SchülerInnen falle es häufig schwer, Mathematik und Realität zu kombinieren und mathematische Lösungen im Kontext zu interpretieren. Jedoch sei es wichtig, genau das im Unterricht zu üben, da die Mathematik häufig als Hilfswissenschaft für andere Disziplinen gelte. Außerdem sollen Ergebnisse über die Grenzen des Faches hinaus interpretiert werden. Probleme bei der Bearbeitung der WebApp könnten laut Lehrperson 2 entstehen, wenn die stochastischen Begrifflichkeiten noch nicht gänzlich verstanden wurden. Es könnte so Schwierigkeiten beim Arbeiten im Kontext der extremen Schneehöhen geben, da dort Argumentationen mit diesen Begriffen erforderlich seien. Dies sei in der achten Klasse AHS jedoch normalerweise nicht der Fall. Empfohlen wurde von Lehrperson 2, dass die SchülerInnen einen klaren Auftrag, wie zum Beispiel die Erstellung eines Portfolios, und einen klaren zeitlichen Rahmen zur Bearbeitung bekommen, damit sie konzentriert arbeiten und nicht zum Spielen mit den Darstellungen verleitet werden.

6 Zusammenfassung und Ausblick

In immer mehr Fachbereichen wird mathematisches Wissen benötigt, um aktuelle Problemstellungen zu lösen. Dadurch ergibt sich ein weites Feld an Anwendungssituationen, die sich im Mathematikunterricht thematisieren lassen. Durch die Behandlung solcher realen Problemstellungen kann die Relevanz der Mathematik in Alltagssituationen gezeigt werden und das Interesse und die Motivation zur Bearbeitung mathematischer Inhalte bei SchülerInnen gesteigert werden. Dabei gilt es, ein ausgewogenes Verhältnis zwischen anwendungsorientiertem und rein fachlichem Mathematikunterricht zu finden. Denn nur mit dem nötigen fachlichen Hintergrundwissen kann nach der richtigen Modellierung eine mathematische Lösung gefunden werden, die in weiterer Folge im Kontext interpretiert werden muss. Durch den verstärkten Technologieeinsatz kann der Fokus auf das Verknüpfen verschiedener Inhalte gelegt werden, da schwierige mathematische Operationen mithilfe des Computers gelöst werden können. Diese Entwicklung zeigt sich momentan auch bei der standardisierten Reife- und Diplomprüfung, bei der Interpretationen von mathematischen Lösungen in anwendungsorientierten Situationen eine zunehmend wichtigere Rolle einnehmen.

Den SchülerInnen Mathematik in einer Anwendungssituation zu zeigen, war auch der Ausgangspunkt für die Erstellung der WebApp „Stochastik mit extremen Schneehöhen“. Mit dieser WebApp wird der Aufbau von grundlegenden stochastischen Kompetenzen im Kontext von Extremschneehöhen in Österreich unterstützt. Dabei können Fähigkeiten und Fertigkeiten im stochastischen und statistischen Denken aufgebaut und wichtige im Lehrplan verankerte Inhalte wie das Konzept der Verteilung oder der Zusammenhang zwischen Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie vermittelt werden. Durch die Modellierung einer Alltagssituation kann die WebApp als guter Ausgangspunkt für fächerübergreifenden Unterricht mit dem

Fach Geographie dienen und bietet sich durch Aufgaben in verschiedenen Schwierigkeitsgraden für differenzierenden Unterricht an.

Durch die Erprobung der WebApp mit drei SchülerInnen und zwei Lehrpersonen an allgemeinbildenden höheren Schulen konnten missverständliche Formulierungen und Unklarheiten verringert werden. In den Interviews konnte herausgefunden werden, dass sowohl SchülerInnen als auch Lehrpersonen den Einsatz der WebApp im Unterricht als sinnvoll erachten. Es stimmten beide Gruppen überein, dass der Einsatz nach der Behandlung des nötigen mathematischen Hintergrundes, insbesondere nach dem Konzept der kontinuierlichen Wahrscheinlichkeitsverteilung, im Unterricht passend sei. Die WebApp kann zur Wiederholung wichtiger stochastischer Konzepte mit einem konkreten Anwendungsbeispiel eingesetzt werden. Die Lehrpersonen sahen mit der realen Situation das Interesse vieler SchülerInnen geweckt. Die SchülerInnen erkannten die Relevanz der Thematik und konnten sich für die interaktive Erarbeitung mit technologischer Unterstützung begeistern.

Durch die fortschreitende Digitalisierung in der Gesellschaft wird es nötig sein, auch in der Schule mehr mit Technologieunterstützung zu arbeiten. Im Mathematikunterricht soll daher zukünftig der Fokus weg vom Beherrschen algorithmischer Rechenverfahren hin zu konzeptionellem Denken gelegt werden. Komplizierte Rechnungen können dabei einfach mit dem Computer gelöst werden. Somit kann der Schwerpunkt auf die Modellierung von realen Situationen und der anschließenden Interpretation mathematischer Ergebnisse gelegt werden (Gravemeijer et al. 2017: 119f). Im Unterricht wird es immer häufiger zum Einsatz von Lern-Apps kommen. Somit ist diese WebApp nur ein erster Schritt, um den Mathematikunterricht moderner und fortschrittlicher zu gestalten. Durch die technologische Unterstützung können häufiger Alltagssituationen thematisiert werden, da Aufgaben, statt durch Berechnung mit schwierigen mathematischen Verfahren, mithilfe der Interpretation von interaktiven Graphiken gelöst werden können. Damit ergibt sich eine wertvolle Chance, in den Mathematikunterricht mehr reale Situationen einzubauen und ihn damit zu attraktivieren.

Literatur

AECC-M (2007): Standards für die mathematischen Fähigkeiten österreichischer Schülerinnen und Schüler am Ende der 8. Schulstufe. Version 4/07. Austrian Educational Competence Center Mathematics - Institut für Didaktik der Mathematik, Alpen-Adria-Universität Klagenfurt.

Auer, I., Böhm, R., Mohnl, H., Potzmann, R., Schöner, W., Skomorowski, P. (2001): ÖKLIM. Digitaler Klimaatlas Österreichs. Eine interaktive Reise durch die Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft des Klimas. In: Hammerl, C., Lenhardt, W., Steinacker, R., Steinhauser, P. (Hrsg.): Die Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik 1851–2001. 150 Jahre Meteorologie und Geophysik in Österreich. Wien: Leykam.

Biehler, R., Engel, J. (2015): Stochastik: Leitidee Daten und Zufall. In: Bruder, R., Hefendehl-Hedeker, L., Schmidt-Thieme, B., Weigand, H.-G. (Hrsg.): Handbuch der Mathematikdidaktik. Berlin, Heidelberg: Springer, S. 221–251.

Blanchet, J., Lehning, M. (2010): Mapping snow depth return levels: smooth spatial modeling versus station interpolation. In: Hydrology and Earth System Sciences 14, S. 2527–2544.

Blum, W. (1985): Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der didaktischen Diskussion. In: Mathematische Semesterberichte 32, S. 195–232.

Blum, W. (1996): Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht. Trends und Perspektiven. In: Kadunz, G., Kautschitsch, H., Ossimitz, G., Schneider, E. (Hrsg.): Trends und Perspektiven. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik 23. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky, S. 15–38.

Blum, W., Leiß, D. (2005): Modellieren im Unterricht mit der „Tanken“-Aufgabe. In: mathematik lehren 128, S. 18–21.

BMB (2016): Lehrpläne der allgemeinbildenden höheren Schulen. Bundesgesetzblatt für die Republik Österreich, 219. Verordnung. Wien: Bundesministerium für Bildung.

BMB (2019): Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik. Inhaltliche und organisatorische Grundlagen zur Sicherung mathematischer Grundkompetenzen. Wien: Bundesministerium für Bildung. URL: https://www.matura.gv.at/index.php?eID=dumpFile&t=f&f=861&token=96731e3efb9cea71397b3063054a604396f213a7 (letzter Zugriff: 06. 01. 2020).

Büchter, A., Leuders, T. (2016): Mathematikaufgaben selbst entwickeln: Lernen fördern - Leistung überprüfen. Berlin: Cornelsen.

Coles, S. (2001): An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values. London: Springer.

Daume, P. (2009): Finanzmathematik im Unterricht. Aktien und Optionen: Mathematische und didaktische Grundlagen mit Unterrichtsmaterialien. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Eichler, A., Vogel, M. (2009): Leitidee Daten und Zufall. Von konkreten Beispielen zur Didaktik der Stochastik. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Engel, J. (2018): Anwendungsorientierte Mathematik: Von Daten zur Funktion. Eine Einführung in die mathematische Modellbildung für Lehramtsstudierende. Berlin, Heidelberg: Springer.

Fischer, R., Malle, G. (1985): Mensch und Mathematik: Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln. Mannheim: Bibliographisches Institut.

Gravemeijer, K., Stephan, M., Julie, C., Lin, F.-L., Ohtani, M. (2017): What Mathematics Education May Prepare Students for the Society of the Future? In: International Journal of Science and Mathematics Education 15.1, S. 105–123.

Greefrath, G. (2018): Anwendungen und Modellieren im Mathematikunterricht. Didaktische Perspektiven zum Sachrechnen in der Sekundarstufe. Berlin, Heidelberg: Springer.

Greefrath, G., Kaiser, G., Blum, W., Ferri, R. B. (2013): Mathematisches Modellieren - Eine Einführung in theoretische und didaktische Hintergründe. In: Ferri, R. B., Greefrath, G., Kaiser, G. (Hrsg.): Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule. Theoretische und didaktische Hintergründe. Wiesbaden: Springer, S. 11–38.

Greefrath, G., Siller, H.-S. (2018): Digitale Werkzeuge, Simulationen und mathematisches Modellieren. In: Greefrath, G., Siller, H.-S. (Hrsg.): Digitale Werkzeuge, Simulationen und mathematisches Modellieren. Didaktische Hintergründe und Erfahrungen aus der Praxis. Wiesbaden: Springer, S. 3–22.

Humenberger, H., Reichel, H.-C. (1995): Fundamentale Ideen der Angewandten Mathematik. Mannheim: Bibliographisches Institut.

Kaiser-Messmer, G. (1986): Anwendungen im Mathematikunterricht. Band 2: Empirische Untersuchungen. Hildesheim: Franzbecker.

KMK (2012): Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Berlin: Kultusministerkonferenz. URL: `https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf` (letzter Zugriff: 06. 01. 2020).

Maaß, J. (2015): Modellieren in der Schule. Ein Lernbuch zu Theorie und Praxis des realitätsbezogenen Mathematikunterrichts. Münster: WTM.

Mittag, H.-J. (2017): Statistik. Eine Einführung mit interaktiven Elementen. Berlin: Springer.

Reiss, R.-D., Thomas, M. (1997): Statistical analysis of extreme values: with applications to insurance, finance, hydrology and other fields. Basel: Birkhäuser.

Reitbrecht, S., Sorger, B. (2018): Operatoren als Marker der Kompetenzorientierung. Eine Analyse des österreichischen Curriculums der Sekundarstufe I. In: Open Online Journal for Research and Education.

Sandmann, A. (2014): Lautes Denken – die Analyse von Denk-, Lern- und Problemlöseprozessen. In: Krüger, D., Parchmann, I., Schecker, H. (Hrsg.): Methoden in der naturwissenschaftsdidaktischen Forschung. Berlin, Heidelberg: Springer, S. 179–188.

Schellander, H., Hell, T. (2018): Modeling snow depth extremes in Austria. In: Natural Hazards 94, S. 1367–1389.

Tietze, U.-P., Klika, M., Wolpers, H. (2002): Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 3: Didaktik der Stochastik. Braunschweig: Vieweg+Teubner.

Weinert, F. E. (2001): Vergleichende Leistungsmessung in Schulen – eine umstrittene Selbstverständlichkeit. In: Weinert, F. E. (Hrsg.): Leistungsmessung in Schulen. Weinheim: Beltz, S. 17–31.