Universität Innsbruck

Institut für Fachdidaktik Mathematik

Sommersemester 2022

Betreuung: Dr. Florian Stampfer

Mathematik und Sprache als ein sich bedingendes Zusammenspiel.

*Das Einüben von Sprachhandlungen bezogen auf den Funktionsbegriffs sowie dessen Sprech- und Schreibweisen durch sprachsensible Aufgaben am Beispiel von Aufgabenbearbeitungen und Interviews mit zwei Schüler*innen der 7. bzw. 8. Schulstufe.*

Scheucher Katharina

Martrikelnummer: 11821983

Bachelorstudium Lehramt Sekundarstufe Mathematik und Deutsch

E-Mail: Katharina.Scheucher@student.uibk.ac.at

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

„Die Grenzen meiner Sprache bedeuten die Grenzen meiner Welt." – dieses viel zitierte und in den unterschiedlichsten Bereichen adaptierbare Zitat von Ludwig Wittgenstein lädt nicht nur zum Nachdenken ein, sondern hebt auch die Bedeutung der Sprache beim Erwerb mathematischer Kompetenzen hervor. Sprache bedient sich einer kognitiven und einer kommunikativen Funktion und das in einem wechselwirkenden Verhältnis zueinander. Denken und Sprache bedingen sich gegenseitig und gehören somit auch beim mathematischen Diskurs zur Tagesordnung. Mathematische Konzepte werden verstanden, also kognitiv verarbeitet, es wird damit gearbeitet und in all diesen Teilschritten benötigt der Mensch die Sprache. Reichen sprachliche Mittel nicht aus, so stoßen wir an unsere Grenzen und ein mangelnder Kompetenzzuwachs ist die Folge. Sprachkompetenz hat einen enormen Einfluss auf die Mathematikleistung, was bereits wiederholt nachgewiesen wurde (Krosanke, 2021: 46–48). Doch wie kann man nun Sprache im Mathematikunterricht so fokussieren, dass davon profitiert wird? Mit dieser Frage beschäftigt sich unter anderem die folgende Arbeit. Im Zentrum der Erprobung wird das Thema *Einführung des Funktionsbegriffs* stehen. Ein für die Schüler*innen sehr relevantes Thema, auf welches in fortschreitenden Auseinandersetzungen mit mathematischen Inhalten immer wieder zurückgegriffen wird. So wichtig das Thema ist, so viele Tücken birgt es in sich. Studien zeigen, dass Schüler*innen häufig Schwierigkeiten haben, den Funktionsbegriff zu fassen, genauer gesagt, zu identifizieren, welche Variable die abhängige ist und welche die unabhängige ist (Zindel, 2019: 37). Somit wird folgende Arbeit auch einen genaueren Blick auf den Begriff der Zuordnung legen und wie dieser sprachsensibel eingeführt werden kann.

Im Fokus der Untersuchung wird die eigens konzipierte Aufgabensammlung zum Thema *Einführung des Funktionsbegriffs* und *Sprech- und Schreibweise zum Funktionsbegriff* stehen. Drei Aufgaben füllen diese Sammlung, wovon zwei sprachsensibel gestaltet sind und eine Schulbuch-typisch ausgelegt ist. Mit zwei Schülern wird die kleine empirische Studie durchgeführt. Folgende Forschungsfragen werden basierend auf den Aufgabenbearbeitungen und den Interviews mit den Schülern beantwortet und diskutiert: Welche Sprachhandlungen fördern die sprachliche Kompetenz im Zusammenhang mit dem Funktionsbegriff sowie den Sprech- und Schreibweisen funktionaler Zusammenhänge? Inwiefern nutzen die Lernenden die sprachlichen Hilfestellungen aus den ersten beiden Aufgaben für das Bearbeiten der dritten Aufgabe?

Vorab jedoch auf die empirische Untersuchung eingegangen wird, werden noch theoretische Rahmenbedingungen geklärt. Eingangs wird auf die Grundvorstellungen zu den Funktionen eingegangen, in einem nächsten Schritt wird näher über den Aspekt der Sprache im Mathematikunterricht diskutiert, es folgt eine verknüpfte Darstellung von Sprache und Mathematik im Bereich Funktionaler Abhängigkeit und den theoretischen Teil abschließend wird dargelegt, wie der neue Lehrplan im Fach Mathematik im Bereich Funktionen (7. und 8. Schulstufe) einen Bezug zur Sprache herstellt. Das Kapitel der Empirischen Untersuchung beinhält nicht nur die Durchführung und Auswertung der Ergebnisse, sondern gibt auch einen Überblick zu den eigens konzipierten Aufgabestellungen in Form eines didaktischen Kommentars.

2 Funktionales Denken und Grundvorstellungen zu Funktionen

„Funktionales Denken ist also bestimmt durch das Denken in Zusammenhängen, das sich in der Auseinandersetzung mit bestimmten Phänomenen entfaltet.“ (Vollrath, 1989: 39)

Laut Vollrath meint der Begriff des Funktionalen Denkens die erworbene Fähigkeit, funktionale Zusammenhänge in der Welt erkennen und wahrnehmen zu können. Umso wichtiger und in diesem Sinne auch zentral für das Verstehen alltäglicher Thematiken ist eine intensive Auseinandersetzung mit diesem Thema im Mathematikunterricht. Die Fähigkeit des Denkens in Zusammenhängen ist Grundvoraussetzung für einen adäquaten Aufbau eines Verständnisses zum Funktionsbegriff und somit grundlegend für die damit einhergehenden Grundvorstellungen (Zindel, 2019: 1).

Wird im deutschsprachigen Raum von Grundvorstellungen im Zusammenhang mit dem thematischen Schwerpunkt des Funktionsbegriffs gesprochen, so hat sich das Konstrukt der drei Grundvorstellungen *Zuordnung, Kovariation* und *Objekt* nach Vollrath und Malle etabliert. Ein erfolgreiches Zusammenspiel dieser drei Konzepte begünstigt das ganzheitliche Verständnis des Funktionsbegriffs. Bei der Zuordnungsvorstellung wird die Beziehung zwischen zwei Größen fokussiert. Es steht die Idee im Vordergrund, dass eine Funktion jedem Wert einer Größe genau einen Wert einer zweiten Größe zuordnet. Betrachtet man die Veränderung zweier Größen genauer, so kommt die Kovariationsvorstellung ins Spiel. Diese meint explizit, dass mit Funktionen erfasst wird „wie sich Änderungen einer Größe auf eine zweite Größe auswirken bzw. wie die zweite Größe durch die erste beeinflusst wird“ (Greefrath, 2016: 48). Wird eine ganzheitliche Perspektive auf die Funktion und ihre Eigenschaften eingenommen, so spricht man von der Objektvorstellung. Hier steht die Idee einer Funktion als einziges Objekt im Vordergrund. Dieses einzige Objekt beschreibt einen Zusammenhang als Ganzes, wodurch mittels dessen auch von einzelnen Aspekten auf das Ganze und umgekehrt geschlossen werden soll (Greefrath, 2016: 47–49).

Zindel spinnt dies drei Grundvorstellungen etwas weiter, um den Kern des Funktionsbegriffs fassbar zu machen. Dafür elementar sind folgende zwei Ideen: Einerseits geht es um die Beziehung zwischen zwei Größen und andererseits um die gemeinsame Veränderung dieser beiden Größen. Um nun also eine Funktion in ihrer Komplexität zu erfassen, sind vier strukturtragende Facetten von Nöten und zwar die *Beteiligten Größen*, die *Variablen Größen*, die *Richtung der Abhängigkeit* und die *Funktionale Abhängigkeit*. Führt man diese vier Facetten des Kerns aus, so geht es darum zu wissen, dass eine Funktion zwei beteiligte Größen hat, welche variabel sind, also verschiedene Werte annehmen können. Schließlich muss auch die

Richtung der Abhängigkeit erkannt und berücksichtigt werden. Welche Größe ist unabhängig und welche ist abhängig? Die Funktionale Abhängigkeit verdichtet alle weiteren strukturtragenden Facetten (Zindel, 2019: 35–36).

3 Sprache als zweite Dimension des Mathematikunterrichts

Sprache ist überall. Ob sie als Grundgerüst bzw. Werkzeug unseres Denkens, als kommunikatives Mittel, als Medium des Informationsaustausches oder aber lediglich als Mittel zur Unterhaltung fungiert, Sprache ist ein unabdingbarer Teil unserer Gesellschaft und bildet somit auch im Mathematikunterricht einen elementaren Aspekt. Spricht man von Sprache im Mathematikunterricht, so ist unter anderem „diejenige Sprache gemeint, die benötigt wird, um über funktionale Zusammenhänge sprechen, entsprechende mathematische Texte verstehen und um ein konzeptuelles Verständnis zum Funktionsbegriff aufbauen zu können“ (Zindel, 2019: 4).

3.1 Sprachliche Ebenen des Mathematikunterrichts

Die drei Sprachregister Alltags-, Bildungs- und Fachsprache unterscheiden sich grob darin, dass die Bildungs- und Fachsprache konzeptionell schriftlich geprägt sind und die Alltagssprache durch konzeptionelle Mündlichkeit der Sprache charakterisiert wird, also jegliche Kommunikation auf Basis der Umgangssprache umfasst (Prediger, 2021: 15). Konzeptionelle Schriftlichkeit meint, dass auch bei medial mündlichen Beiträgen der Charakter der geschriebenen Sprache erhalten bleibt (Prediger, 2021: 15). Die konzeptionelle Mündlichkeit hingegen betont das Gesprochene in informellen Situationen (Prediger, 2021: 13–14). Die Alltagssprache ist häufig sehr ungenau, eng an einen Kontext gebunden (Gasser, 2019: 19–20) und erlaubt daher Auslassungen, welche Mimik, Gestik oder Unbestimmtheiten kompensieren (Prediger, 2021: 14). Da im Unterricht nicht nur die Alltagssprache der Lernenden aktiviert wird, sondern diese auch eine Konfrontation der Bildungssprache mittels Texten aus Schulbüchern, Tageszeitungen oder Ähnlichem und der Sprache der Lehrpersonen erfahren, spielt dieser zweite Sprachregister ebenfalls eine bedeutsamen Rolle. Zudem sind die Lernenden auch selbst angehalten, Bildungssprache zu sprechen, was die Relevanz dieser im Kontext Schule noch einmal mehr hervorhebt. Bildungssprache hat drei Funktionen zu erfüllen, nämlich in kommunikativer Funktion als Medium von Wissenstransfer, in kognitiver Funktion als Werkzeug des Denkens, vor allem in Spracherwerbsprozessen, und in sozialer Funktion als Eintrittskarte für schulisch und akademisch erfolgreiche Laufbahnen (Wessel, 2015: 23). Vieles aus der Alltagssprache wird in der Bildungssprache expliziter, verdichteter und präziser formuliert (Prediger, 2021: 14). Sind in diesem Sprachregister zusätzlich fachsprachliche Elemente enthalten, so ist von der dritten Sprachebene, der Fachsprache, die Rede. Somit bildet die Bildungssprache die Basis für die Fachsprache, welche geprägt durch eigene Fachbegriffe, spezifische Satzstrukturen und Textsorten wie Definitionen, Textaufgaben oder Merksätze ist (Prediger, 2021: 13). Wer einzelne fachsprachliche Wörter nicht interpretieren kann, kann die Bedeutung der Aussage nicht erfassen, was die Relevanz der Fachsprache im Mathematikunterricht betont (Prediger, 2021: 14).

3.2 Funktionen und Rolle von Sprachen beim Mathematiklernen

„[Sprache] ist wie ein Werkzeug, das man gebraucht, während man es noch schmiedet." (Zitiert nach: Zindel, 2019: 47)

Sprache nimmt im Mathematikunterricht verschiedene Rollen und Funktionen ein. Ist von der Systematisierung der Funktion von Sprache die Rede, so geht es um die kognitive und die kommunikative Seite der Sprache. Mit Rollen ist die Sprache als Lernmedium, Lernziel, Lerngegenstand und Lernvoraussetzung gemeint. Diese Klassifizierung ist dahingehend hilfreich, dass in aktuellen Diskussionen um sprachliche Schwierigkeiten von Lernenden im Mathematikunterricht diese auch eine Einordnung finden.

3.2.1 Rollen von Sprache im Mathematikunterricht

„[Es zeigt sich,] dass die Sprache im Mathematikunterricht selbst auch Lerngegenstand ist und ferner als wichtigstes Lernmedium zur Lernvoraussetzung wird und unter ungünstigen Bedingungen auch zum Lernhindernis werden kann." (Meyer und Tiedemann, 2017: 39)

Im Mathematikunterricht werden vier Rollen von Sprache unterschieden, welche sich gegenseitig bedingen. Lernen geschieht durch mündliche oder schriftliche Kommunikation, die im Unterricht beispielsweise durch Gespräche oder Erklärtexte eingefordert bzw. angewendet wird (Prediger, 2021: 7). In diesem Sinne werden fachliche Lernprozesse stets sprachlich vermittelt und somit gilt Sprache in diesem Kontext als Lernmedium, also als *Vermittler* im Unterrichtsgeschehen (Krosanke, 2021: 55). Besonders bedeutsam ist Sprache in dieser Rolle für das Denken und für Begriffsbildungsprozesse (Zindel, 2019: 47). Da Sprache also Lernmedium, gleichzeitig aber auch Mittel zur Leistungsüberprüfung ist, entwickelt sich diese auch als Lernvoraussetzung für schulischen Erfolg (Krosanke, 2021: 55). Kann diese Voraussetzung nicht erfüllt werden, so wird Sprache zum Lernhindernis (Krosanke, 2021: 55). Aufgrund dieser Tatsache bilden die Bildungsstandards und die curricularen

Kompetenzerwartungen für die jeweilige Lernstufe die zu erreichenden bildungssprachlichen und fachsprachlichen Kompetenzen ab (Krosanke, 2021: 55). Um diese geforderten bildungs- und fachsprachlichen Kompetenzen zu erreichen, muss Sprache im Unterricht einerseits zum Lernziel und andererseits zum Lerngegenstand gemacht werden (Krosanke, 2021: 55).
Betrachtet man Sprache unter Berücksichtigung der drei Sprachregister Alltags-, Bildungs- und Fachsprache, so äußert sich die Alltagssprache in der Regel als Lernvoraussetzung und die Fachsprache als Lerngegenstand, sofern diese im Unterricht explizit eingefordert wird (Zindel, 2019: 48). Die bildungssprachlichen Anforderungen spielen im Unterrichtsgeschehen als Lernmedium insofern eine Rolle, als dass eine ungleich verteilte Lernvoraussetzung vorzufinden ist (Zindel, 2019: 48). Während einige Lernende bereits über die Bildungssprache verfügen, stellt diese für andere erst einen Lerngegenstand dar (Zindel, 2019: 48). Diese ungleiche Verteilung der sprachlichen Lernvoraussetzungen kann im sprachsensiblen Mathematikunterricht kompensiert werden, indem Sprache in diesen unterschiedlichen Rollen berücksichtigt und fokussiert wird.

3.2.2 Die kommunikative und kognitive Funktion von Sprache

„Die kommunikative Funktion dient der Verständigung, die kognitive Funktion dient dem Erkenntnisgewinn.“ (Zitiert nach: Krosanke, 2021: 55)

Das Wechselwirken von Mathematik und Sprache liegt unter anderem der doppelten Funktion von Sprache zu Grunde. Im Unterrichtsalltag ist es der Fall, dass Sprache meist in Kombination mit anderen Darstellungsmöglichkeiten auftritt. Sprache fungiert in diesem Kontext als „Bedingung, Ergänzung oder [als] Stolperstein“ (Gasser, 2019: 16). Untersucht man die Funktion von Sprache im Unterrichtsgeschehen – vor allem auch im Mathematikunterricht – genauer, so kommt das Modell von Maier und Schweiger aus dem Jahr 1999 ins Spiel. Hier wird Sprache als Lernmedium in ihren beiden Teilfunktionen, der kognitiven Funktion und der kommunikativen Funktion, unterschieden, was somit den unmittelbaren Zusammenhang dieser beiden Aspekte betont (Prediger, 2021: 26). Ist von der kommunikativen Funktion die Rede, so geht es um Sprache als Verständigungsmedium, welche beispielsweise beim Präsentieren von Inhalten oder beim Lesen von Textaufgaben genutzt wird (Prediger, 2021: 26). In ihrer kommunikativen Funktion fungiert Sprache als Mittel zur Verständigung, da eigene Gedanken und Auffassungen mit dem sozialen Umfeld geteilt werden (Wessel, 2015: 16). Geht es darum, Inhalte tiefgreifender zu verstehen und somit Sprache als Werkzeug des Denkens zu nutzen, so tritt die kognitive Funktion in den Vordergrund (Prediger, 2021: 26). Diese dient dem

Erkenntnisgewinn, der durch „Verdichtung des Informationstransports durch begriffliche Repräsentation [geschieht]“ (Zitiert nach: Wessel, 2015: 16). Auf diese Weise kann neues Wissen in seiner Struktur begrifflich erfasst und abgespeichert werden (Wessel, 2015: 16). Diese Funktion von Sprache wird vor allem bei Verbalisierungsaktivitäten für fachliches Lernen genutzt (Wessel, 2015: 16), sodass inhaltliche Zusammenhänge erfasst werden können (Prediger, 2021: 26). Setzt man nun die beiden Funktionen von Sprache in Zusammenhang, so wirkt sich die kommunikative Seite verstärkend auf die kognitive aus, da die Prozesse des Erkenntnisgewinns unterstützt werden (Wessel, 2015: 16). Taucht man tiefer in die Welt der Mathematik ein, so ist gerade die kognitive Funktion unabdingbar, da hier die Sprache als Denkwerkzeug relevant ist (Prediger, 2021: 26). Mathematischen Konzepten wird somit eine Bedeutung zugesprochen. Um dies anhand eines Beispiels zu illustrieren, wird auf das Thema *Funktionale Abhängigkeit* zurückgegriffen. Wer keine *Je-desto-Bausteine* bilden kann, wird das Konzept hinter diesem Thema nicht verstehen (Prediger, 2021: 26). Mithilfe der kommunikativen Funktion von Sprache kann in Folge dessen das verstandene Konzept nach außen getragen werden.

4 Verknüpfung von Sprache und Mathematik im Bereich Funktionaler Abhängigkeit

4.1 Sprech- und Schreibweisen zum Funktionsbegriff

In der Mathematik hat bis heute noch keine eindeutige Schreib- und Sprechweise im Zusammenhang mit dem Funktionsbegriff Anklang gefunden. Ausgehend von den unterschiedlichen Definitionen des Funktionsbegriffs hat sich auch eine Vielfalt an Schreib- und Sprechweisen etabliert. Was jedoch mit einer bestimmten Schreib- und Sprechweise einhergeht, ist eine entsprechende Vorstellung zum Funktionsbegriff. Hischer nennt hierbei beispielhaft eine Sprechweise, welche die Vorstellung einer eindeutigen Zuordnung von Eingabe- und Ausgabe-Werten anspricht. „Wir erwarten also wie bei einer Maschine auf eine bestimmte Eingabe eine eindeutig bestimmte Ausgabe, und damit ist etwas Typisches des Funktionsbegriffs angesprochen: die eindeutige Zuordnung“ (Zitiert nach: Zindel, 2019: 22). Ordnet man diese Vorstellung bei Vollrath ein, so wäre das die Zuordnungsvorstellung, bei welcher die Maschine mit Input x und Output $f(x)$ aufgefasst werden kann (Zitiert nach: Zindel, 2019: 22). Gemeinsam mit den unterschiedlichen Definitionen des Funktionsbegriffs zeigen sich eben auch einige differente Akzentuierungen der Schreib- und Sprechweisen. „Die Funktion $y = f(x)$“, die Funktion $f(x)$, die Funktion $y = y(x)$, die Funktion $x \rightarrow f(x)$, die Funktion f oder es wird eine Wertetabelle als Funktion bezeichnet (Zitiert nach: Zindel, 2019: 22–23). Diese von Hischer aufgelisteten Beispiele zeigen diese Vielfältigkeit an Möglichkeiten der Schreibweisen zum Funktionsbegriff. Einige Varianten legen den Fokus expliziter auf die zugrundeliegende Abhängigkeit („die Funktion $y = f(x)$“), wohingegen andere Schreib- und Sprechweisen sich mehr auf bestimmte Darstellungen beziehen („Wertetabelle als Funktion“). Welche Problematik jedoch mit dieser Uneindeutigkeit der Schreib- und Sprechweisen einhergeht, dass einige mathematisch nicht eindeutig sind. Setzt man die Artikel bei der Sprechweise „x wird y zugeordnet“ in unterschiedliche Fälle, wie „dem x wird das y zugeordnet“ oder „das x wird dem y zugeordnet“, so ist eine Bedeutungsverschiebung die Folge. Hischer schlägt hierbei die alternative Lesart „aus x wird y“ vor, um einer solchen sprachlichen Problematik vorzubeugen (Zindel, 2019: 22–24).

Anhand dieses Beispiels wird deutlich, wie relevant Sprache auch im Mathematikunterricht ist. Solche sprachlichen Phänomene sind nämlich eng mit konzeptuellen Schwierigkeiten verknüpft, womit die Bedeutung eines sprachsensiblen Mathematikunterrichts zu begründen ist.

4.2 Darstellungsformen von Funktionen

Betrachtet man das Konzept des Funktionsbegriffs genauer, so ist vorab die Darstellungsform einer Funktion zu berücksichtigen. Mit dem Rad der Zeit und der damit verbundenen Entwicklung des Funktionsbegriffs in der Geschichte haben sich auch dessen Darstellungsformen verändert und etabliert. Heute sind diese unter der Viergliederung *symbolisch*, *graphisch*, *tabellarisch* und *verbal* bekannt. Doch nun tut sich die Frage auf, ob auch alle dieser vier Kategorien denselben Stellenwert im Mathematikunterricht haben. Wirft man im Zuge dieser Überlegung einen Blick in empirische Studien zum Lehren und Lernen des Funktionsbegriffs, so kann diesen entnommen werden, dass die *verbale* Darstellung in der Literatur als einzige oft unberücksichtigt bleibt (Zindel, 2019: 12). Da der Fokus in dieser Arbeit jedoch sehr eng an die *verbale* Darstellung des Funktionsbegriff gekoppelt ist und es somit einer klaren Definition dieser bedarf, wird diese im Folgenden expliziert. Spricht man also von der *verbalen* Darstellung, so ist ein explizites Sprachmittel gemeint, welches zur Beschreibung des gerichteten funktionalen Zusammenhangs verwendet wird. Es wird der gerichtete funktionale Zusammenhang beschrieben, wofür ein tragfähiger Umgang mit der Identifikation und Interpretation dessen eingefordert wird (Zindel, 2019: 13).

Um einige Beispiele für Sprachmittel zu geben und somit zu demonstrieren, wie funktionale Abhängigkeiten verbal gefasst werden können, bietet folgende Tabelle einen Überblick. Auch erste sprachliche Tücken sind ersichtlich, da nicht nur die Wahl der Formulierungen oder die Setzung der Fälle im Satz, sondern auch die beiden Handlungsrichtungen *Aktiv* und *Passiv* Schwierigkeiten bezogen auf die inhaltlichen Grundvorstellungen in sich bergen.

Aktiv	**Passiv**
○ „Die Funktion gibt den zurückgelegten Weg in Abhängigkeit von der Zeit an.“ ○ „Die Funktion gibt den von der Zeit abhängigen zurückgelegten Weg an.“ ○ „Die Funktion gibt den zurückgelegten Weg an, der von der Zeit abhängig ist.“	○ „Der zurückgelegte Weg wird in Abhängigkeit von der Zeit angegeben.“ ○ „Es wird der von der Zeit abhängige zurückgelegte Weg angegeben.“ ○ „Es wird der zurückgelegte Weg angegeben, der von der Zeit abhängig ist.“
○ „Die Funktion ordnet der Zeit den zurückgelegten Weg zu.“ ○ „Die Funktion ordnet den zurückgelegten Weg der Zeit zu.“	○ „Der Zeit wird der zurückgelegte Weg zugeordnet.“ ○ „Der zurückgelegte Weg wird der Zeit zugeordnet.“

***Abbildung 1**: Die sprachliche Vielfalt möglicher verbaler Darstellungen (Zindel, 2019: 58)*

5 Neuer Lehrplan im Fach Mathematik und der Bezug zur Sprache

„Mathematik kann als eigene, auf der ganzen Welt gleich verwendete Sprache aufgefasst werden.“ (Beratungsgruppe Mathematik, 2021: 1) - wirft man einen Blick auf die einleitenden Worte des neuen Fachlehrplans Mathematik für die Sekundarstufe 1 (Stand: 12.08.2021), so fällt bereits auf, dass Sprache zunehmend in den Vordergrund rückt. In der Mathematik werden außermathematische Problemstellungen in die Sprache der Mathematik übertragen, um diese anschließend bearbeiten zu können. Diese Ergebnisse bzw. Lösungen müssen jedoch wiederum in die ursprüngliche Anwendungssituation zurückübersetzt werden, um damit sinnvoll arbeiten zu können (Beratungsgruppe Mathematik, 2021: 1). Um aber diese Schritte der Übersetzung und Rückübersetzung durchführen zu können, bedarf es unter anderem sprachlicher Kompetenz. In der Mathematik wird dies oft formuliert als Interpretieren, Argumentieren und Begründen. Sprache dient hier als Werkzeug des Denkens und sollte deshalb auch im Lehrplan im Fach Mathematik berücksichtigt werden. Welche Stellen des neuen Fachlehrplans Mathematik für die Sekundarstufe 1 in den Klassen 3 (Schulstufe 7) und 4 (Schulstufe 8) im Bereich *Funktionaler Zusammenhang* sprachliche Aspekte berücksichtigen bzw. als Kernkompetenz fordern, zeigt folgender Auszug:

3. Klasse

Kompetenzbereich 2: Variablen und Funktionen

Die Schüler*innen können Terme, Gleichungen und Formeln auch im Zusammenhang mit Verhältnissen bzw. Proportionen aufstellen und interpretieren.

- kontextbezogenes Deuten von Termen und Formeln
- Beschreiben, wie sich die Änderung von Größen auf eine andere Größe in einer Formel auswirkt

(Beratungsgruppe Mathematik, 2021: 18–19).

4. Klasse

Kompetenzbereich 2: Variablen und Funktionen

Die Schüler*innen können mit Termen, Gleichungen mit einer Variablen und Formeln in vielfältigen Situationen arbeiten.

- Beschreiben, wie sich die Änderung von Größen auf eine andere Größe in einer Formel auswirkt
- Interpretieren grafischer Darstellungen in Sachsituationen, insbesondere Ablesen von Werten und Beschreiben von Änderungen

(Beratungsgruppe Mathematik, 2021: 22).

Allein dieser Auszug eines ausgewählten mathematisch fachlichen Schwerpunktes *Funktionen und Variablen* macht deutlich, dass die sprachlichen Anforderungen im Mathematikunterricht in Bezug auf die Sprachproduktion und Sprachrezeption an Bedeutung gewinnen. Es werden hier also nicht nur die beiden Funktionen von Sprache, sondern auch die Sprachregister (Alltags-, Bildungs- und Fachsprache) berücksichtigt.

6 Empirische Untersuchung anhand zweier sprachsensibler Aufgaben

6.1 Untersuchungsgegenstand und Vorgehensweise

Im Zuge der Untersuchungen wurden drei Aufgaben erstellt, wovon zwei sprachsensibel gestaltet sind und die dritte Aufgabe sehr den typischen Schulbuchaufgaben gleicht. Folgende Ausführung im Unterkapitel 6.2 stellt diese Aufgaben vor und erläutert die didaktischen Überlegungen anhand von Textfeldern. Die beiden ersten Aufgaben sind so erstellt, dass sie den Schüler*innen ermöglichen, sich auch sprachliche Kompetenzen im Zusammenhang mit funktionalen Zusammenhängen anzueignen. Zudem sollen diese sprachlichen Hilfestellungen den Schüler*innen einen erleichterten Zugang zum Thema geben.

Die empirische Untersuchung wird mit zwei Schülern durchgeführt, wobei ein Schüler eine dritten Klasse AHS und der andere Schüler eine vierte Klasse AHS besuchen. Der Schüler der dritten Klasse AHS ist mit dem Thema *Funktionen* bzw. *Funktionaler Zusammenhang* noch nicht in Berührung gekommen, der Schüler der vierten Klasse AHS hat die Einführung zum Funktionsbegriff jedoch in der Schule bereits behandelt. Die Untersuchung wird mit beiden Schülern separat durchgeführt. Zu Beginn erhalten diese die beiden sprachsensibel konzipierten Aufgaben, sobald diese erledigt sind, folgt die individuelle Bearbeitung der dritten Aufgabe, die ohne sprachliche Hilfestellungen erstellt wurde. Die Lernenden bearbeiten die Aufgaben für sich und in einem anschließenden Interview wird mit jedem Schüler individuell über die Aufgaben gesprochen.

Es soll also anhand der bearbeiteten Aufgaben sowie den mit den Lernenden durchgeführten Interviews untersucht werden, welche Sprachhandlungen die sprachliche Kompetenz im Zusammenhang mit dem Funktionsbegriff sowie den Sprech- und Schreibweisen funktionaler Zusammenhänge fördern und inwiefern die Lernenden die sprachlichen Hilfestellungen aus den ersten beiden Aufgaben für das Bearbeiten der dritten Aufgabe nutzen bzw. wie diese mit den sprachsensiblen Aufgaben zurechtkommen.

6.2 Didaktischer Kommentar zu den sprachsensibel konzipierten Aufgaben

Die Entwicklung der Aufgabenstellungen erfolgte über eine Anlehnung an bereits bestehendes sprachsensibles Material zum Themenfeld *Funktionale Zusammenhänge* (Zentgraf & Prediger, 2022), jedoch wurden die in diesem Kapitel folgenden Aufgabenstellungen so adaptiert, dass sie neben einer ersten Vorstellung zum Funktionsbegriff, also dem Zusammenhang zwischen zwei Größen, auch die dazugehörigen Sprech- und Schreibweisen behandeln.

Folgende Aufgaben fokussieren die drei Facetten eines funktionalen Zusammenhangs, die in jeder der drei Grundvorstellungen identifiziert werden können. Dazu zählt das Analysieren der beteiligten Größen, das Analysieren der variablen Größen und die Richtung der Abhängigkeit (Zentgraf & Prediger, 2021: 3). Zudem sollen darauf aufbauend funktionale Zusammenhänge symbolisch verstanden werden. Außerdem geben die Aufgaben eine Einführung zum Begriff der Zuordnung zwischen zwei Größen sowie der Sprech- und Schreibweise zum Funktionsbegriff und eignen sich als Einstieg, um in den Themenkomplex *Funktionen* einzuführen. Neben diesem didaktischen Zugang sind die Aufgaben außerdem sprachsensibel konzipiert. Es wird versucht, mit Hilfe von Sprache Mathematisches einfacher fassbar zu machen, indem Sprache so eingeübt wird, dass sprachlichen Fehlern vorgebeugt werden kann. Sind mathematische Problemstellungen verschriftlicht, so müssen diese erst sprachlich und inhaltlich dekodiert werden (Zentgraf & Prediger, 2021: 3). Befassen sich die Lernenden intensiver mit sprachlichen Kompositionen in Verbindung mit mathematischen Thematiken, so werden diese für die Vielfalt an grammatischen Ausdrucksmöglichkeiten sensibilisiert. Werden also die sprachlichen Fähigkeiten sukzessive weiterentwickelt und somit sprachliche Hürden beseitigt, so können mathematische Prozesse einfacher verstanden werden.

Die Erprobungen mit den Schüler*innen sollen unter anderem Aufschluss darüber geben, welche Teilaufgaben bereits verständlich für Schüler*innen formuliert wurden und welche noch Überholungsbedarf haben.

6.2.1 Aufgabe 1

Zuordnungsaspekt - die Bezeichnungen *Größe* 1 und *Größe 2* wurden gewählt, um die Vorstellung zu entwickeln, dass es sich bei x und y um Größen handelt – fassbarere Vorstellung.

Der Begriff *Zuordnung* wurde hier als sinnvoller erachtet als der Begriff der *Abhängigkeit*, da die Vorstellung einer *Abhängigkeit* zwischen zwei Größen nicht klar signalisiert, welche Größe von welcher abhängt. Der Zugang zum Begriff der *Zuordnung* gibt hingegen ein klareres Bild des Konzeptes des Funktionsbegriffs.

EINFÜHRUNG: ZUORDNUNG UND SPRECH- UND SCHREIBWEISEN ZUM FUNKTIONSBEGRIFF

Fokus: symbolische & verbale Darstellung

Aufgabe 1: Zuordnung zwischen zwei Größen

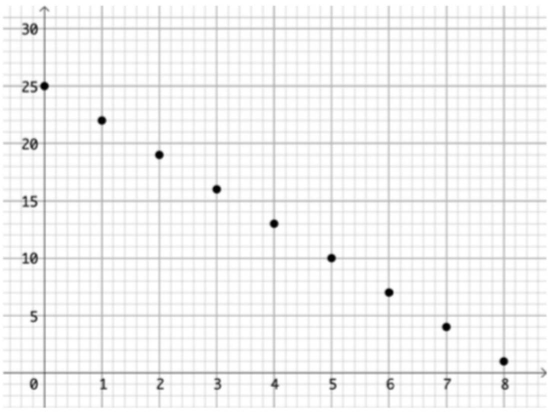
Eine *Zuordnung* besteht zwischen 2 Größen. Du sagst dazu: Der Größe 1 wird die Größe 2 zugeordnet. Kurz: Größe 1 → Größe 2.

Wenn: Größe 1 verändert sich. Dann: Größe 2 kann sich verändern. Du sagst kurz: Größe 2 **verändert sich mit** Größe 1.

Kovariationsaspekt - es geht hier um die Vorstellung, dass die Größen variabel sind, also sich bedingt durch einander verändern.

SACHSITUATION: Brenndauer einer Kerze

Elias will wissen wie lang eine Kerze braucht, um abzubrennen. Natürlich weiß er, dass es unter anderem von der Länge der Kerze abhängt, wie lange diese brennt. Um seine Frage zu beantworten, nimmt er eine Kerze mit einer Länge von 25 cm und zündet diese an. Da Elias aber sehr neugierig ist, misst er jede Minute die noch verbleibende Länge der Kerze und notiert seine Ergebnisse wie folgt:



Schritt 1: **Größe 1** und **Größe 2** finden und identifizieren und Veränderung beschreiben:

- **Beispielzahlen finden**: Entnimm aus der Sachsituation bzw. aus der Grafik in der Angabe zwei Beispielzahlen.

  Nach ___ Minuten ist die Kerze ___ cm lang.

  Nach ___ Minuten ist die Kerze ___ cm lang.

- **Veränderung beschreiben**: Wie verändert sich die Länge der Kerze im Verlauf der Zeit?

  Wenn ______________________________

  Dann ______________________________

1

Kovariationsaspekt – hier steht der Aspekt der Veränderung im Vordergrund, denn den Schüler*innen soll vor Augen geführt werden, dass die Größen 1 und 2 veränderlich sind; die Richtung der Abhängigkeit soll begründet werden (*wenn, dann)*; auch wird die Vorstellung der Funktion als Ganzes deutlich. Sprachmittel, die den Zusammenhang ausdrücken: Konjunktionen ***wenn, dann***.

Zuordnungsaspekt – hier sollen die beteiligten Größen identifiziert werden, indem Wertepaare von den Schüler*innen selbst anhand der graphischen Darstellung gefunden werden; die Größen erhalten eine Einheit, um zu verdeutlichen, in welchen Kontext diese passen.
Sprachmittel, die den Zusammenhang. ausdrücken: Präposition ***nach***.

Die Lernenden benennen hier die variablen Größen explizit, um sich zu verinnerlichen, dass diese in unterschiedlichen Kontexten anderen Größen mit wiederum anderen Einheiten entsprechen können.

Kovariationsvorstellung – die Richtung der Abhängigkeit der beiden Größen soll benannt werden.

- **Größen benennen**: Was ist **Größe 1** und was ist **Größe 2** in diesem Beispiel?

  Größe 1 ist ____ .

  Größe 2 ist ____ .

Welche Größe verändert sich mit welcher? _______________ verändert sich mit _______________.

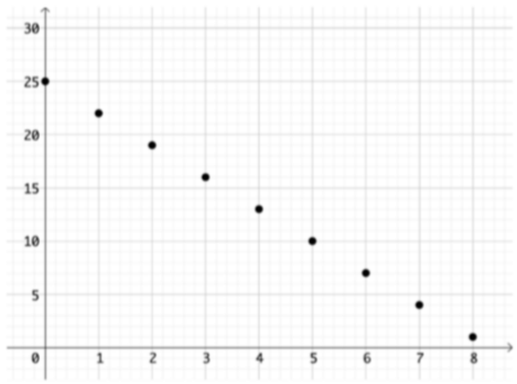
Der Begriff der Zuordnung wird als solcher bezeichnet und in den gegebenen Kontext gesetzt.

Welche Größe wird welcher Größe zugeordnet?

Zuordnung:

Schritt 2: Beschrifte die Grafik. Fülle dazu die Größen im gegebenen Kontext in die leeren Felder ein.

Die **verbale Darstellung** eines funktionalen Zusammenhangs soll hier mit der **graphischen Darstellung** vernetzt werden.



Hier soll ein Transfer des Gelernten mit den eigenen Erfahrungen der Schüler*innen hergestellt werden, also eine Verknüpfung mit der Lebenswelt bzw. ein Lebensweltbezug.

EXKURS:

Überlege: Welche Situation mit 2 Größen kennst du? Finde Beispielzahlen, beschreibe die Veränderung und benenne die 2 Größen.

6.2.2 Aufgabe 2

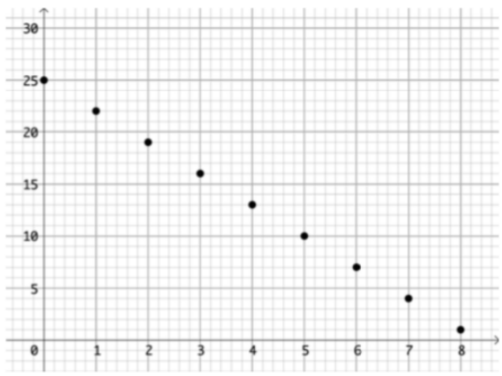
Aufgabe 2: Sprech- und Schreibweisen zum Funktionsbegriff

SACHSITUATION: Wir haben wieder dieselbe Sachsituation wie in Aufgabe 1.

Elias will wissen wie lang eine Kerze braucht, um abzubrennen. Natürlich weiß er, dass es unter anderem von der Länge der Kerze abhängt, wie lange diese brennt. Um seine Frage zu beantworten, nimmt er eine Kerze mit einer Länge von 25 cm und zündet diese an. Da Elias aber sehr neugierig ist, misst er jede Minute die noch verbleibende Länge der Kerze und notiert seine Ergebnisse wie folgt:

Für die zweite Aufgabe wird dieselbe Sachsituation wie in der ersten Aufgabe verwendet, um die bereits behandelten Konzepte weiterspinnen zu können.

Größe 2: Länge der Kerze (cm)



Größe 1: Zeit (min)

In Aufgabe 1 hast du festgestellt, dass die **Größe 1** die **Zeit** und die **Größe 2** die **Länge der Kerze** ist. Wir brauchen diese Information für die folgende Aufgabe.

Die Größe 1 und die Größe 2 erhalten in diesem Schritt die Bezeichnungen x und $f(x)$, sodass in einem weiteren Schritt damit gerechnet werden kann.

Nun steht x für die Größe 1 und f(x) für die Größe 2.

In der Situation heißt das:

Der Größe 1 wird die Größe 2 zugeordnet. (Größe 1 → Größe 2) Also: Der Zeit wird die Länge der Kerze zugeordnet.	**x** steht für die Zeit in Minuten **f(x)** steht für die Länge der Kerze in cm (Du sagst: „f von x“)

Um auf grammatikalischen Hürden basierenden Fehlern vorzubeugen, wird auch die alternative Schreibweise **Größe 1 → Größe 2** gegeben.

Schritt 1: Vervollständige die Tabelle. Schreibe mit mathematischen Symbolen (rechte Seite) zur Situation (linke Seite).

BEDEUTUNG IN DER SACHSITUATION	**MATHEMATISCH MIT SYMBOLEN**
Die Länge der Kerze ist nach 3 Minuten gleich 16 cm.	f(3)=16
Die Länge der Kerze ist nach 2 Minuten gleich 19 cm.	____________________

3

Das fachliche Teilziel hierbei ist, einzelne Wertepaare im Symbolischen zuzuordnen, was bedeutet, eine lokale Zuordnung zu beschreiben und im gegebenen Kontext zu deuten.

Nun geht es darum, die Bedeutung in der Sachsituation in die Sprache der Mathematik zu übersetzen. Die Schüler*innen sollen dabei unter anderem lernen, mathematische Situationen (bzw. mathematische Symbolsprache) zu beschreiben, um in einem weiteren Schritt auch mathematisch argumentieren zu lernen.

Wie lang ist die Kerze nach 4 Minuten?	Was ist f(4)?
Wie lang ist die Kerze nach 7 Minuten?	______________________________
Nach wie vielen Minuten ist die Länge der Kerze 10 cm?	Für welche Zahl x ist f(x)=10?
Nach wie vielen Minuten ist die Länge der Kerze 22 cm?	______________________________

Es folgen Aufgaben, die eine Übersetzung von der mathematischen Symbolsprache in die Bedeutung der Sachsituation verlangen. Ziel ist es, die verschiedenen Schreib- und Sprechweisen einzuüben.

Schritt 2:

Schritt 2 bietet die Möglichkeit einer weiteren Übungsphase für das Übersetzen von der Sachsituation in die mathematische Symbolsprache und umgekehrt.

- **Schreibe nun mathematisch mit Symbolen**, indem du eigene Beispiele zur Situation von Elias findest:

  f(1)= _____ f(___)= _____

  Was bedeutet das in der Sachsituation?

- **Was bedeutet das in der Sachsituation:**

  Was ist f(7)?

  Für welche Zahl x ist f(x)=6?

- **Schreibe die Sachsituation mathematisch mit Symbolen:**

  Die Länge der Kerze ist nach 8 Minuten gleich 1 cm.

  Wie lang ist die Kerze nach 4 Minuten?

  Nach wie vielen Minuten ist die Kerze 7 cm lang?

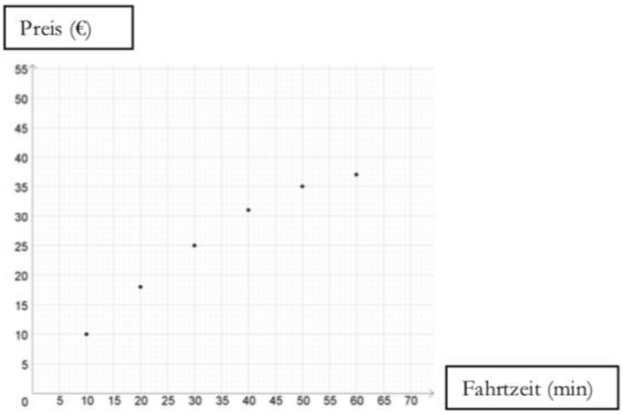
Aufgabe 3 ist so konzipiert, dass auf sprachliche Hilfestellungen verzichtet wird, um zu überprüfen, ob die Schüler*innen die Sprachmittel aus Aufgabe 1 und Aufgabe 2 anwenden. Vom Konzept her ist die Aufgabe an die vorherigen Aufgaben angelehnt, um den Transfer zu erleichtern. Bei der Sachsituation handelt es sich diesmal aber nicht um einen linearen Zusammenhang.

6.2.3 Aufgabe 3

Aufgabe 3: Zuordnung zwischen zwei Größen & Sprech- und Schreibweisen zum Funktionsbegriff

SACHSITUATION: Kartrennen

Eli und Paul beschließen, ihren Tag im Vergnügungspark zu verbringen, um sich ein Rennen im Kartfahren zu liefern. Am Ticketstand stehen die Fahrtzeiten und die Preise angeschrieben. Eli und Paul haben dazu folgende Grafik erstellt.



- **Welche Größe wird welcher Größe zugeordnet?**

- **Entnimm aus der Situation bzw. aus der Grafik in der Angabe zwei Beispielzahlen.**

- **Wie verändert sich der Preis im Verlauf der Zeit?**

5

- Was ist **x** und was **f(x)** in dieser Sachsituation?

- **Was bedeutet f(30)=25 in der Sachsituation?**

- **Schreibe nun mathematisch mit Symbolen**, dass man bei 50 Minuten 35€ bezahlen muss.

6.3 Durchführung

Die empirische Studie wird mit zwei Schülern einer dritten Klasse AHS (Monat der Erhebung: Juni 2022) und einer vierten Klasse AHS (Monat der Erhebung: Juli 2022) durchgeführt. Unabhängig voneinander bearbeiten die Schüler die Aufgabenpakete mit drei Aufgaben, wovon zwei sprachsensibel und eine schulbuchtypisch gestaltet sind. Nach der Bearbeitung folgt ein Interview, welches Aufschluss darüber geben soll, wie es den Schülern mit den Aufgabenstellungen ergangen ist und wo es Schwierigkeiten gab. Ebenfalls werden die Schülerantworten für die Verbesserung der Aufgabenstellungen herangezogen, wobei eine nähere Ausführung dazu in der Diskussion zu finden ist. Zudem wird während der Bearbeitung der jeweiligen Schüler mitdokumentiert, bei welchen Teilaufgaben es Schwierigkeiten gab und warum. Auch diese Aufzeichnungen werden in die Verbesserung der Aufgaben eingearbeitet.

6.4 Auswertung der Ergebnisse

Die bearbeiteten Aufgaben der beiden Schüler werden unabhängig voneinander nach denselben Kriterien ausgewertet. Es werden die Lösungen des ersten Schülers analysiert und in einem nächsten Schritt die Bearbeitungen des zweiten Schülers. Der Fokus der Auswertungen liegt auf der nicht sprachsensibel konzipierten Aufgabe 3. Es wird unter anderem untersucht, ob die in den Aufgaben 1 und 2 eingeführten Formulierungen der eingangs kurzen Theorieinputs in Aufgabe 3 verwendet werden.

Eine *Zuordnung* besteht zwischen 2 Größen. Du sagst dazu: Der Größe 1 wird die Größe 2 zugeordnet. Kurz: Größe 1 → Größe 2.

Wenn: Größe 1 verändert sich. Dann: Größe 2 kann sich verändern. Du sagst kurz: Größe 2 **verändert sich mit** Größe 1.

Abbildung 2*: Formulierungen zum Konzept der Zuordnung zwischen zwei Größen*

In Aufgabe 1 hast du festgestellt, dass die **Größe 1** die **Zeit** und die **Größe 2** die **Länge der Kerze** ist. Wir brauchen diese Information für die folgende Aufgabe.

Nun steht x für die Größe 1 und f(x) für die Größe 2.

In der Situation heißt das:

Der Größe 1 wird die Größe 2 zugeordnet. (Größe 1 → Größe 2) Also: Der Zeit wird die Länge der Kerze zugeordnet.	**x** steht für die Zeit in Minuten **f(x)** steht für die Länge der Kerze in cm (Du sagst: „f von x")

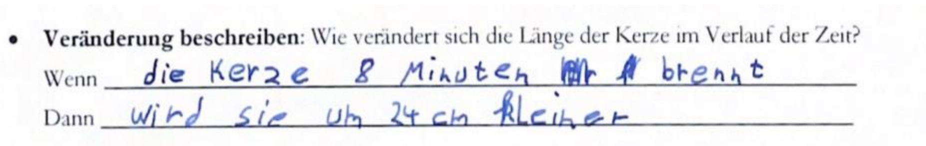
Abbildung 3*: Formulierungen zu den Schreib- und Sprechweisen zum Funktionsbegriff*

Außerdem wird analysiert, ob die Schüler die als Hilfestellung gegebenen Sprachmittel, die bei den Teilaufgaben in Aufgabe 1 und 2 vorkommen, in Aufgabe 3 für ihre Antworten verwenden oder nicht. Zur Veranschaulichung wird bei der Auswertung die fokussierte Stelle der Schülerantwort eingebaut und an passender Stelle kommentiert. Interessant wird auch sein, ob die Schüler in Aufgabe 3 die in den beiden vorherigen Aufgaben angepeilten didaktischen Ziele erfüllen. Folgende Fragen sollen bei der Auswertung auch berücksichtigt werden. Wo treten Fehler auf? In welchen inhaltlichen Teilgebieten gibt es offensichtlich noch Unklarheiten?

6.4.1 Schüler 1

Der Schüler der ersten Durchführung besucht eine vierte Klasse AHS und hat sich in der Schule bereits mit dem Thema *Zuordnung zwischen zwei Größen* beschäftigt. Auch erste Auseinandersetzungen des Schülers mit der *Schreibweise zu Funktionen* fanden in der Schule statt.

Bei der Aufgabe 1 beim Schritt 1 hatte der Schüler keine Probleme dabei, Beispielzahlen zu finden. Auch bei der zweiten Teilaufgabe des ersten Schritts wurde die Aufgabe, bei der es darum ging, die Veränderung zu beschreiben, richtig beantwortet.

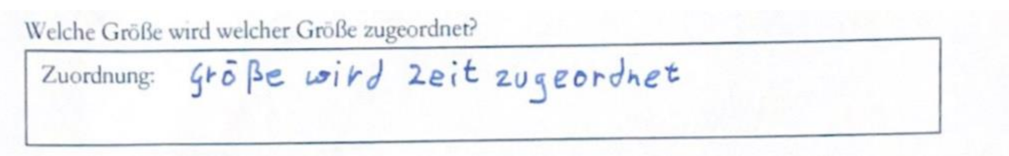

- **Veränderung beschreiben:** Wie verändert sich die Länge der Kerze im Verlauf der Zeit?

Wenn die Kerze 8 Minuten brennt

Dann wird sie um 24 cm kleiner

Der Schüler hat eine eigene Lösung gefunden, die zwar nicht ganz so allgemein gehalten wurde, den Veränderungsaspekt jedoch berücksichtigt und zeigt, dass Größe 1 und 2 veränderlich sind. Die Vorstellung der Funktion als Ganzes geht klar hervor.

Ebenfalls richtig bearbeitet wurde von Seiten des Schülers die Teilaufgabe, wo es darum ging, die Größen 1 und 2 zu benennen und die Veränderung dieser zu beschreiben, was wiederum zeigt, dass die Kovariationsvorstellung verinnerlicht ist. Bei der Frage, welche Größe welcher Größe zugeordnet wird, gab es jedoch Schwierigkeiten.

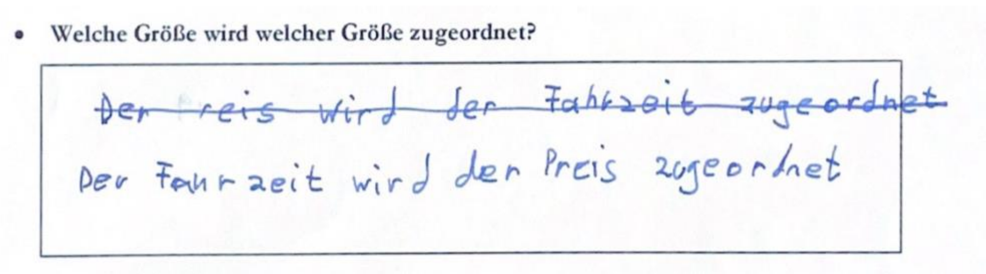

Welche Größe wird welcher Größe zugeordnet?

Zuordnung: Größe wird Zeit zugeordnet

Der Schüler lässt die Artikel weg, weswegen nicht klar ist, welcher Größe nun welche Größe zugeordnet wird. Wird der Größe, also der Länge der Kerze, die Zeit zugeordnet oder wird die Größe der Zeit zugeordnet? Diese Antwort gibt wiederum klar zu erkennen, wie wichtig Sprache im Mathematikunterricht ist und greift genau dieses Phänomen auf, welches im

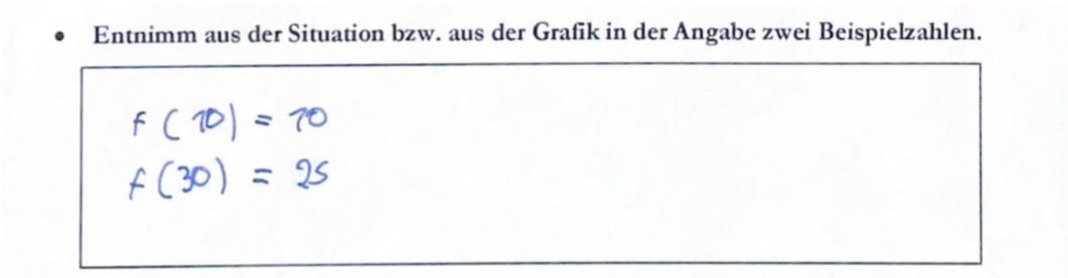
Abschnitt 4.1 erläutert wurde. Setzt man die beiden Größen in unterschiedliche Fälle, so geht damit oft eine Bedeutungsverschiebung einher. Es ist nicht mehr klar, welche Größe welcher zugeordnet wird. Aus diesem Grund empfiehlt sich auch die Schreibweise *Größe 1* → *Größe 2*, welche den Zusammenhang sehr gut symbolisiert.
Auch bei Schritt 2 der ersten Aufgabe gab es keine Probleme, die Beschriftung der beiden Achsen konnte im gegebenen Kontext gefunden werden. Der Exkurs hingegen verwirrte den Schüler mehr, als dieser helfen konnte, einen Transfer zur Lebenswelt herzustellen. Ihm war nicht klar, was hier zu tun ist.
Beim ersten Schritt der Aufgabe 2 hat der Schüler sehr schnell verstanden, wie diese zu bearbeiten ist. Das Übersetzen von der mathematischen Symbolsprache in die Bedeutung der Sachsituation und umgekehrt ging sehr zügig und wurde auch richtig gelöst. Die erste Teilaufgabe des zweiten Schritts der Aufgabe 2 hat hingegen einige Probleme in sich geborgen. Der Schüler wusste hier nicht, was zu tun ist und ließ die Aufgabe auch unbearbeitet. Die restlichen Teilaufgaben wurden hingegen wieder fehlerfrei bearbeitet.

In einem nächsten Schritt wird näher auf die Bearbeitung der Aufgabe 3 eingegangen, welche auch ausschlaggebend für die Beantwortung der Forschungsfrage, inwiefern die Lernenden die sprachlichen Hilfestellungen aus den ersten beiden Aufgaben für das Bearbeiten der dritten Aufgabe nutzen, ist.
Vorab ist anzumerken, dass der Schüler im Zuge des Interviews gesagt hat, dass ihm aufgefallen ist, dass bei den Aufgabenstellungen mehr Wörter verwendet werden und, dass ihm das auch das Lösen der Aufgaben erleichtert hat.
Betrachtet man die erste Teilaufgabe der dritten Aufgabe, so ist zu erkennen, dass der Schüler seine erste Antwort durchgestrichten und diese gleich anders formuliert hat. Die Bedeutung der beiden Aussagen sind jedoch äquivalent, sie unterscheiden sich lediglich in ihrer Satzstellung. Beide Sätze sagen aus: Fahrzeit → Preis.


- **Welche Größe wird welcher Größe zugeordnet?**

~~Der Preis wird der Fahrzeit zugeordnet~~
Der Fahrzeit wird der Preis zugeordnet

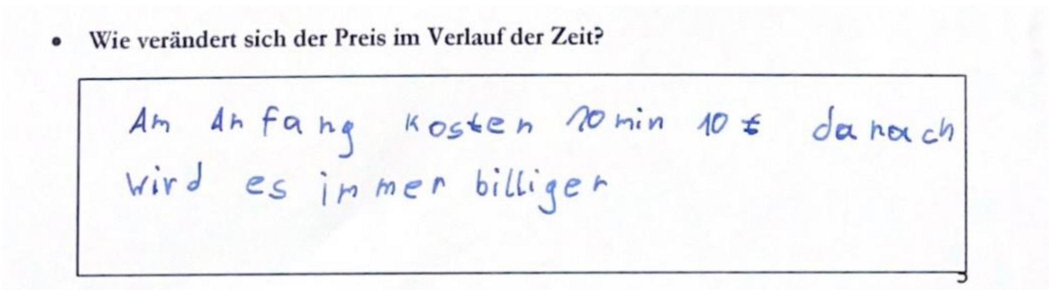
Man sieht, dass hier eine sprachliche Tücke im Zusammenhang mit dem Formulieren der Zuordnung zwischen zwei Größen gegeben ist. Beleuchtet man den Aspekt der wiederverwendeten Sprachmittel, so kann gesagt werden, dass der Schüler hier, wie im einleitenden Theorieinput der ersten Aufgabe eingeführt wurde, die Sprechweise einer Zuordnung verwendet. Möglich gewesen wäre hier auch die Schreibweise *Größe 1* → *Größe* 2. Es kann angenommen werden, dass der Schüler hier womöglich aufgrund schulischer Einführung zum Thema die ihm bekannte Sprechweise angewandt hat. Auch wurden die Begriffe *Größe 1* und *Größe 2* nicht benutzt, sondern wurden gleich in den gegebenen Kontext gesetzt. Wirft man noch einen Blick auf die inhaltlichen Ziele, so ist festzustellen, dass der Schüler die Zuordnungsvorstellung verinnerlicht hat.



- **Entnimm aus der Situation bzw. aus der Grafik in der Angabe zwei Beispielzahlen.**

$f(10) = 10$
$f(30) = 25$

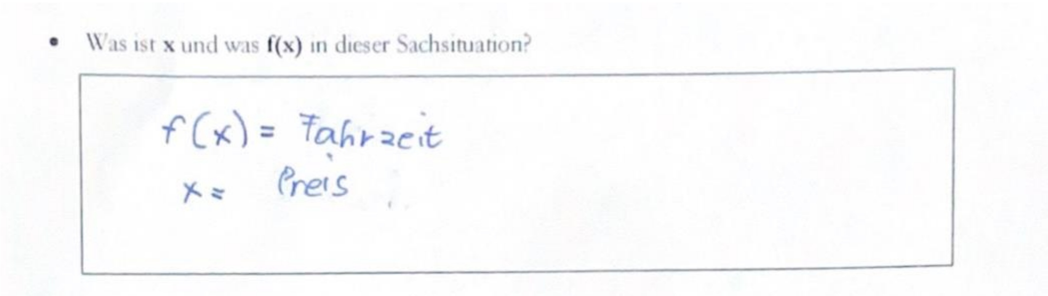
In der zweiten Teilaufgabe nutzt der Schüler gar keine Sprachmittel für das Formulieren seiner Antwort. Zwar werden Beispielzahlen richtig gefunden und angegeben, jedoch werden diese weder mithilfe von Worten beschrieben, noch wird die sprachliche Hilfestellung mit der einleitenden Präposition *nach* aus der Aufgabe 1 angewandt. Aus inhaltlicher Sicht hat der Schüler die Vorstellung der Zuordnung hier wieder unter Beweis gestellt, indem die beteiligten Größen durch das Auffinden von Wertepaaren identifiziert wurden, aber der sprachliche Aspekt wurde vernachlässigt.



- **Wie verändert sich der Preis im Verlauf der Zeit?**

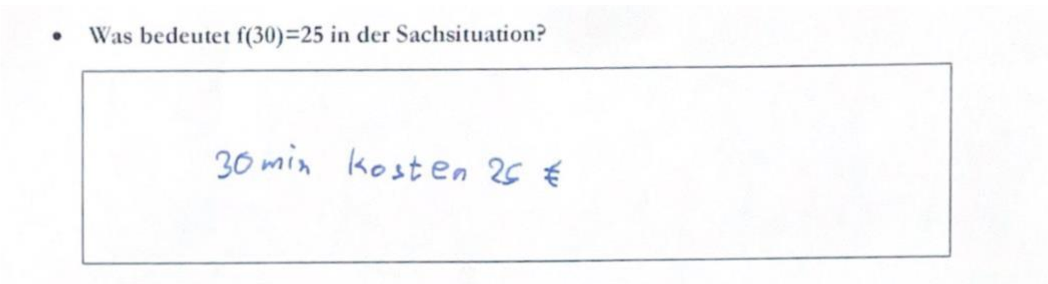
Am Anfang kosten 10 min 10 € danach
wird es immer billiger

Auch bei dieser Teilaufgabe vernachlässigt der Schüler die in Aufgabe 1 angebotenen Sprachmittel. Die Konjunktionen *wenn, dann* hätten hier Verwendung finden können, um den Aspekt der Veränderung in den Vordergrund zu rücken und die Richtung der Abhängigkeit zu begründen. Auch die Formulierung, dass es *danach immer billiger wird* ist so nicht korrekt. Es wird vermutet, dass der Schüler hier einen richtigen Gedanken hatte, diesen jedoch sprachlich falsch formuliert hat. Genau diesem Problem sollte mit dem Einüben von Sprachmitteln entgegengewirkt bzw. vorgebeugt werden. Vermutlich hat der Schüler hier gemeint, dass es sich für mehr Minuten Fahrtzeit so rechnet, dass das Fahren mit steigender Zeit pro Minute billiger wird. Die Vorstellung einer Funktion als Ganzes und die Kovariationsvorstellung werden also nicht als eingeübt angenommen.


- Was ist **x** und was **f(x)** in dieser Sachsituation?

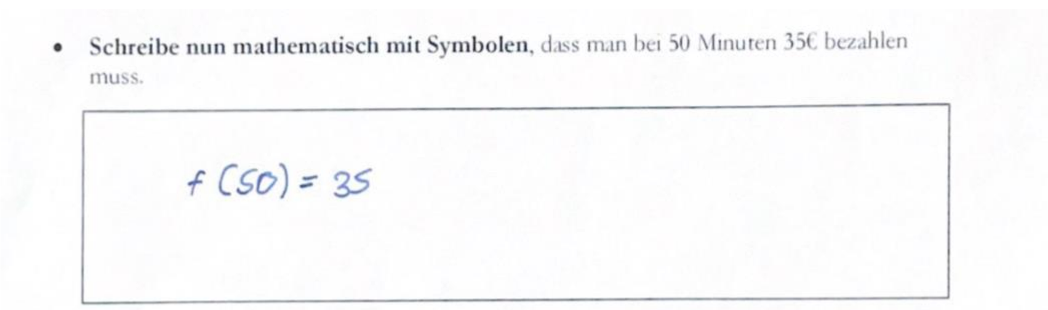
f(x) = Fahrzeit
x = Preis

An die vierte Teilaufgabe geht der Schüler auch wieder sehr strikt mathematisch heran. Wie in Aufgabe 2 wählt dieser für die Funktion die Bezeichnung f. Mit seiner kompakt formulierten Antwort zeigt er, dass er auch hier wieder wenig Sprachmittel verwendet und mehr auf mathematisch symbolische Kompaktheit setzt. Eine mögliche Antwort, die sprachlich ausformuliert ist, könnte so aussehen: *x steht für den Preis in Euro, f(x) steht für die Fahrtzeit in Minuten*. Inhaltlich wird das fachliche Teilziel aber nicht erreicht, da x in der Sachsituation eigentlich die Fahrtzeit und $f(x)$ der Preis ist. Entweder wurden vom Schüler die beteiligten Größen 1 und 2 falsch identifiziert oder diesen die falsche Bezeichnung gegeben.


- **Was bedeutet f(30)=25 in der Sachsituation?**

30 min kosten 25 €

Ziel dieser Aufgabe ist es, die mathematische Symbolsprache in die Bedeutung der Sachsituation zu übersetzen. Auch hier finden sich in der Schülerantwort keine zur Aufgabe 2 ähnlichen Sprachmittel. Der Schüler hält sich mit seiner Antwort sehr knapp, formuliert die mathematischen Symbole nicht richtig aus. In Aufgabe 2 wurde in der Antwort beispielsweise mit vollständigen Sätzen gearbeitet. Rein inhaltlich wurde hier aber richtig gearbeitet, da die Symbole inhaltlich richtig genannt werden.

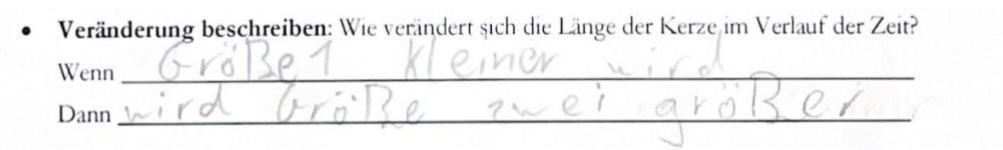

- **Schreibe nun mathematisch mit Symbolen,** dass man bei 50 Minuten 35€ bezahlen muss.

f(50) = 35

Die Übersetzung des Schülers von der Bedeutung der Sachsituation in die mathematische Symbolsprache wurde korrekt durchgeführt. Bei dieser Teilaufgabe sind für die Antwort per se keine Sprachmittel erforderlich bzw. auch nicht möglich. Inhaltlich hat der Schüler diese Hürde also bewältigt.
Prinzipiell hat der Schüler erwähnt, dass für ihn die ersten beiden Aufgaben etwas komplexer waren als die dritte Aufgabe. Auch hat er im Interview anklingen lassen, dass man für das Lösen der dritten Aufgabe die sprachlichen Hilfestellungen nicht unbedingt braucht. Was man hierbei sieht, dass der Schüler sich bei den schulbuchähnlichen Aufgaben wohler fühlt und diese auch mit möglichst kurzen Schreibweisen beantwortet, was bei den Lösungserwartungen der Schulbuchaufgaben so typisch ist. Auf Grund dessen erachtet dieser das Verwenden von Sprachmitteln womöglich auch als nicht so essentiell bzw. als Teilaufgabe.

6.4.2 Schüler 2

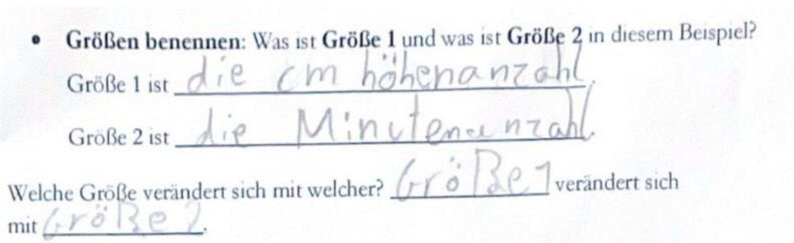
Der zweite Schüler, welcher an der empirischen Studie teilnahm, besucht eine dritte Klasse AHS und ist bis dato noch nicht in Berührung mit dem Thema *Zuordnung zwischen zwei Größen* gekommen. Generell war der Themenkomplex *Funktionen* für ihn neu.
Bei dem ersten Schritt der Aufgabe 1 wurden erfolgreich Beispielzahlen gefunden. Bei der darauffolgenden Teilaufgabe, wo nach dem Beschreiben der Veränderung gefragt wird, versucht der Schüler zwar, die Funktion als Ganzes zu beschreiben und er arbeitet auch mit dem Begriff der Größe, beschreibt den Zusammenhang jedoch nicht korrekt.


- **Veränderung beschreiben**: Wie verändert sich die Länge der Kerze im Verlauf der Zeit?

Wenn Größe 1 kleiner wird

Dann wird Größe zwei größer

Vermutlich versucht der Schüler hier zu erläutern, wenn mehr Zeit vergeht, also wenn die Größe 1 größer wird, dann wir die Kerze kürzer, sprich die Größe 2 kleiner. Kurz gesagt verwechselt der Schüler womöglich schlicht die beiden Größen in ihrer Bezeichnung.
Diese Verwechslung der beiden Größen zieht sich auch durch die beiden nächsten Teilaufgaben.


- **Größen benennen**: Was ist **Größe 1** und was ist **Größe 2** in diesem Beispiel?

Größe 1 ist die cm höhenanzahl.

Größe 2 ist die Minutenenanzahl.

Welche Größe verändert sich mit welcher? Größe 1 verändert sich mit Größe 2.

Was jedoch im Zuge dessen richtig beantwortet wurde, ist die Beschreibung der Veränderung der beiden Größen. Zwar verändert sich die Größe 2 mit der Größe 1, da der Schüler aber die beiden Größen im vorherigen Schritt verkehrt bezeichnet hat, passt dies in dem Kontext wiederum.

Auch beim Schritt 2 der Aufgabe 1 vertauscht der Schüler bei der Beschriftung der Achsen die beiden Größen. Hervorzuheben ist wiederum, dass dieser konsequent die Sprechweise Größe 1 und Größe 2 beibehält.

Welche Größe wird welcher Größe zugeordnet?

Zuordnung: Größe 1 wird Größe 2 zugeordnet.

Bei der Beschreibung der Zuordnung nutzt der Schüler zwar, wie im Theorieteil eingeführt, die richtige Sprechweise, verwendet aber keine Artikel. Es ist also nicht klar, welche Größe nun welcher Größe zugeordnet wird.

EXKURS:

Überlege: Welche Situation mit 2 Größen kennst du? Finde Beispielzahlen, beschreibe die Veränderung und benenne die 2 Größen.

Die Strecke von einem Zug:
Größe 1: Minuten der Fahrt
Größe 2: Km der Fahrt
Wenn sich größe 1 vergröserт, vergrösert sich Größ 2 auch.

Im Gegensatz zu Schüler 1 hat Schüler 2 beim Exkurs ein sehr Lebenswelt-bezogenes Beispiel gefunden. Auch die Größen wurden in diesem Kontext richtig gewählt und die *Wenn, dann - Veränderung* fehlerfrei beschrieben.

Schritt 1 der zweiten Aufgabe wurde vom Schüler nicht sofort verstanden. Nach dem von mir gegebenem Hinweis, dass jeweils eine Beispielaufgabe vorgegeben ist, hat der Schüler die Aufgabe sofort richtig bearbeitet. Schritt 2 wurde wieder sehr rasch gelöst. Es wurden auch die Sprachmittel aus der Aufgabe 2 des ersten Schritts passend angewandt. Lediglich bei einer Teilaufgabe ist anders übersetzt worden als in Schritt 1.

Nach wie vielen Minuten ist die Kerze 7 cm lang?

f(x) = 7

In einem nächsten Schritt wird auch hier wieder näher auf die Bearbeitung der Aufgabe 3 eingegangen, welche ausschlaggebend für die Beantwortung der Forschungsfrage, inwiefern die Lernenden die sprachlichen Hilfestellungen aus den ersten beiden Aufgaben für das Bearbeiten der dritten Aufgabe nutzen, ist.

Wie es beim Schüler 1 der Fall war, ist auch dem Schüler 2 aufgefallen, dass die Aufgaben weniger zum typisch rechnen, mehr sprachlich angelehnt sind. Außerdem merkt dieser bereits an, dass die dritte Aufgabe sehr den Aufgaben aus den Schulbüchern ähnelt.

Bei der ersten Teilaufgabe der dritten Aufgabe ist zu sehen, dass der Schüler die Sprechweise aus den Formulierungen in der Theorie aufgegriffen hat.

- **Welche Größe wird welcher Größe zugeordnet?**

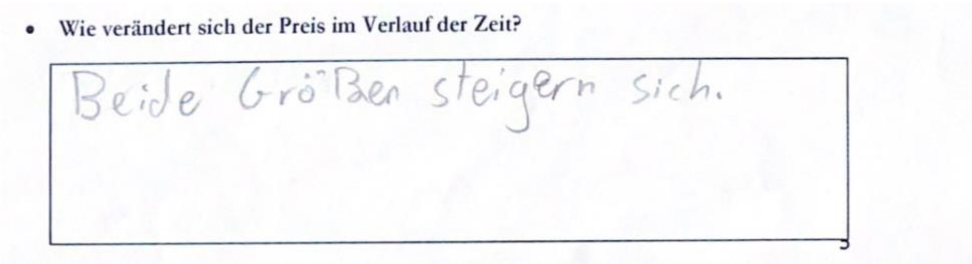
Es wird die Preisgröße der Fahrtzeitgröße zugeordnet.

Zudem benützt dieser den Begriff der Größe, welcher ebenfalls zu Beginn so eingeführt wurde. Der Schüler greift die Sprachmittel auf und setzt die Aufgabe auch inhaltlich richtig um, da die Vorstellung, dass der Größe 1 die Größe 2 zugeordnet wird, verinnerlicht ist. Ebenfalls fällt hier auf, dass der Schüler auch auf die Sprechweise zurückgreift und nicht die Schreibweise *Größe 1* → *Größe 2* nutzt.

- **Entnimm aus der Situation bzw. aus der Grafik in der Angabe zwei Beispielzahlen.**

Größe 1: 10
Größe 2: 50

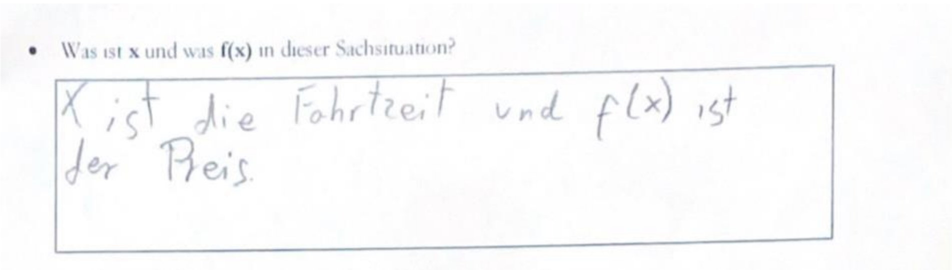
Auch hier arbeitet der Schüler wieder mit dem Begriff der Größe, was wiederum signalisiert, dass die Vorstellung entwickelt wurde, dass es sich bei x und y um Größen handelt. Jedoch wurde kein passendes Wertepaar gefunden. Auch wurden die Sprachmittel aus Aufgabe 1 nicht wiederverwendet, da kein vollständiger Satz formuliert und auch nicht die Präposition *nach* in der Antwort eingebaut wurde. Die Bezeichnungen der Größe 1 und 2 sitzen zwar, aber werden diese inhaltlich noch nicht adäquat eingesetzt. Im Interview merkt der Schüler bereits an, dass ihm die Begriffe der Größe 1 und Größe 2 prinzipiell eher schwergefallen sind, trotzdem verwendet er diese konsequent im ganzen Aufgabenkomplex.



- **Wie verändert sich der Preis im Verlauf der Zeit?**

Beide Größen steigern sich.

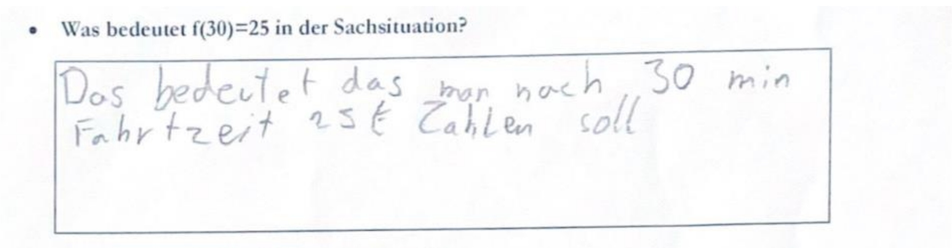
Die in Aufgabe 1 eingeführte sprachliche Hilfestellung *wenn*, *dann* werden nicht aufgegriffen. Die Bezeichnung *Größen* wird auch in dieser Teilaufgabe wieder sinngemäß eingesetzt. Zudem zeigt der Schüler mit seiner Antwort, dass Größen veränderlich sind, da sie sich beide *steigern*. Somit kann gesagt werden, dass die Kovariationsvorstellung in gewisser Hinsicht angenommen wurde. Wie die beiden Größen jedoch zueinander in Beziehung stehen, wird nicht deutlich, weshalb der Objektaspekt, also die Vorstellung der Funktion als Ganzes, nicht erfüllt wird.



- Was ist **x** und was **f(x)** in dieser Sachsituation?

X ist die Fahrtzeit und f(x) ist der Preis.

Bei der expliziten Benennung der beiden Größen zeigt der Schüler wiederum, dass er mit Sprachmitteln arbeitet, die ihm angeboten wurde. Im Theorieinput aus Aufgabe 2 wurden die Größe 1 und 2 ebenfalls so bezeichnet. Zudem identifiziert der Schüler die beiden Größen im gegebenen Kontext korrekt. Dieser hat also die erste Hürde bezogen auf Schreibweise zum Funktionsbegriff erfolgreich überwunden, sodass in einem nächsten Schritt damit gerechnet werden kann.

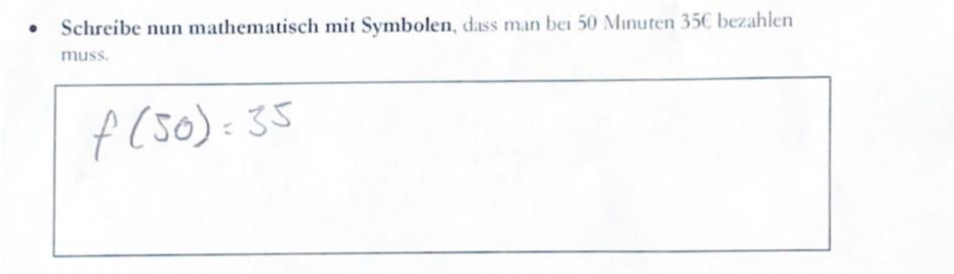


- **Was bedeutet f(30)=25 in der Sachsituation?**

Das bedeutet das man nach 30 min Fahrtzeit 25 € Zahlen soll

Man sieht, dass auch bei dieser Antwort wieder viel mit Sprache gearbeitet wird. Zwar wird nicht genau dieselbe sprachliche Formulierung wie in Aufgabe 2 eingesetzt, trotzdem wird ähnlich dazu statt mit der Präposition *für* mit der Präposition *nach* gearbeitet. Außerdem werden die Einheiten der beiden Größen richtig genannt. Aus diesen inhaltlich und sprachlich richtigen

Ansätzen gibt der Schüler eine korrekte Antwort. Das Übersetzen von der mathematischen Symbolsprache in die Bedeutung der Sachsituation funktioniert.



- **Schreibe nun mathematisch mit Symbolen**, dass man bei 50 Minuten 35€ bezahlen muss.

$f(50) = 35$

Der Rückschritt, also die Übersetzung von der Bedeutung in der Sachsituation in die Symbolsprache der Mathematik funktioniert ebenfalls einwandfrei. Der Schüler zeigt, dass er die Schreibweise zum Funktionsbegriff verinnerlicht hat.

6.5 Diskussion der Ergebnisse

Aufgabe 3	**Sprachhandlung verwendet**	**Sprachhandlung nicht verwendet**	**anderes passendes Sprachmittel verwendet**
Teilaufgabe 1	x		
Teilaufgabe 2		x	
Teilaufgabe 3		x	
Teilaufgabe 4		x	
Teilaufgabe 5		x	
Teilaufgabe 6	x		

Abbildung 4*: Verwendung Sprachmittel Schüler 1*

Aufgabe 3	**Sprachhandlung verwendet**	**Sprachhandlung nicht verwendet**	**anderes passendes Sprachmittel verwendet**
Teilaufgabe 1	x		
Teilaufgabe 2		x	
Teilaufgabe 3		x	
Teilaufgabe 4	x		
Teilaufgabe 5			x
Teilaufgabe 6	x		

Abbildung 5*: Verwendung Sprachmittel Schüler 2*

Fasst man die ausgewerteten Ergebnisse mit Blick auf das Wiederverwenden der in Aufgabe 1 und 2 gegebenen Sprachmittel in Aufgabe 3 zusammen und stellt die der beiden Schüler einander gegenüber, so fällt eine Polarisierung auf. Schüler 2, welcher in der Schule noch keinen Kontakt mit dem in dem Aufgabenpaket eingeführten Themenkomplex hatte, greift auffallend öfter auf die sprachlichen Hilfestellungen zurück und arbeitet auch generell mehr mit Sprache. Seine Antworten aus Aufgabe 3 sind überwiegend sprachlich ausgeschmückt. Hingegen verbleibt der Schüler 1, welcher in der Schule bereits eine Auseinandersetzung mit dem Thema erfahren hat, sprachlich sehr knapp und formuliert seine Antworten überwiegend in mathematischer Symbolsprache. Man sieht, dass der Schüler, welcher noch nicht mit einer anderen Einführung zum Funktionsbegriff aus der Schule vorbelastet ist, die sprachlichen Hilfestellungen viel mehr annimmt. Vor allem baut der Schüler 2 auch die Bezeichnungen der *Größe 1* und *Größe 2* durchgehend bei seinen ausformulierten Antworten ein. Schüler 1 verzichtet fast gänzlich darauf und fährt die Schiene seines in der Schule erlernten Konzepts. Aus diesem Ergebnis kann schlussgefolgert werden, dass Schüler*innen sehr wohl offen für sprachsensiblen Mathematikunterricht sind. Vermutlich kommt es darauf an, ob die Schüler bereits Kontakt mit dem Thema hatten oder nicht. Somit könnte bei neu eingeführten Themen der Fokus auf Sprache gelegt werden und die Schüler*innen profitieren von diesen Vorzügen. Beleuchtet man noch einmal den Aspekt der Zuordnung bei den Ergebnissen der beiden Schüler genauer, so fällt auf, dass hier nicht durchwegs Klarheit geherrscht hat. Unsicherheiten sind in diesem Zusammenhang aufgetreten. Schüler 2 hat sich aber bei der ersten Aufgabe bei der Teilaufgabe der Benennung des Zusammenhangs auf den Theorieinput gestützt und in Folge dessen auch in Aufgabe 3 den Zusammenhang der neuen Sachsituation richtig benannt. Auch der *wenn, dann* – Zusammenhang, welcher helfen soll, die Veränderung der beiden Größen zu beschreiben, wird vom Schüler 2 angenommen und im Interview als offensichtlich hilfreich beschrieben. Auch im Exkurs dieses Schülers ist zu sehen, dass dieser auch wieder aus freier Hand diese *wenn, dann* – Formulierung aufgreift, um sein eigenes Beispiel zu erklären. Zudem unterstützen ihn die Lückentexte bei der Aufgabe 1, wo Beispielzahlen zu finden sind, da auch diese wieder aufgegriffen wurden. Also hat bei dem Schüler 2 nicht nur die sprachliche Hilfestellung des Begriffs der Größe, sondern auch die Formulierung für das Beschreiben der Veränderung und für das Finden der Beispielzahlen gezeigt, dass Sprachhandlungen sehr wohl das mathematische Verständnis für ein Thema unterstützend beeinflussen, falls diese natürlich vom Lernenden angenommen werden. Um die Fragen, wie die Schüler mit den sprachsensiblen Aufgaben zurechtkommen, zu beantworten, wird auf die Interviews mit den beiden Schülern zurückgegriffen. Den Aussagen beider Schüler folgend, ist klar zu entnehmen, dass die sprachlichen Hilfestellungen zwar etwas gewöhnungsbedürftig sind, aber trotzdem als hilfreich und angenehm wahrgenommen wurden.

Resultierend aus und basierend auf den Rückmeldungen und der Fehlerhaftigkeit bzw. Fehlerfreiheit der Schülerantworten, wird ein Überarbeitungsvorschlag zu den ersten beiden

Aufgabenstellungen gegeben, sodass das Aufgabenpaket zur Einführung des Funktionsbegriffs verwendet werden kann. Bei folgendem Vorschlag für die Überarbeitung wird in der Reihenfolge der Aufgaben vorgegangen.

Was vorab zum Format und zur Übersichtlichkeit der ersten beiden Aufgaben gesagt werden kann, dass nicht klar ersichtlich ist, dass der Theorieinput allgemein und zunächst unabhängig von der Aufgabe verstanden wird, da dieser nicht sichtlich von der Aufgabe getrennt ist. Der Vorschlag hier wäre, den Theorieteil als solchen zu markieren und erst nach diesem die Aufgabe 1 zu starten, so sehen die Schüler*innen gleich, wo die Aufgabe beginnt und was sie vorab an Informationen für die Aufgabe benötigen. Vielleicht wird dann auch im Zuge der Bearbeitungen der Teilaufgaben mehr auf die Sprachhandlungen des Theorieteils zurückgegriffen.

Laut Schülerkommentaren der empirischen Untersuchung wurde rückgemeldet, dass bei der ersten Aufgabe beim ersten Schritt, in dem es darum geht, die Veränderung zu beschreiben, eine genauere Instruktion nötig wäre. Anstatt zu schreiben „Wie verändert sich die Länge der Kerze im Verlauf der Zeit?“ könnte man die Angabe so formulieren: „Wie verändert sich die Länge der Kerze im Verlauf der Zeit? Beschreibe die Veränderung der beiden Größen, indem du die folgenden zwei Satzteile so vervollständigst, dass sie zum Kontext passen.“.

Bei der zweiten Aufgabe gab es teilweise Startschwierigkeiten beim Schritt 1, da nicht ganz klar war, dass es sich in der Tabelle bei den ungeraden Zeilen um Beispiele handelt. Das wäre bei einer Überarbeitung besser zu kennzeichnen. Auch bei der ersten Teilaufgabe des Schritts 2 sind Probleme aufgetaucht. Statt *Sachsituation* würde sich die Bezeichnung *in Elias Situation* zur besseren Verständlichkeit eignen. Auch konnten nicht in allen Fällen Beispiele zur Situation gefunden werden. In dem zweiten Feld, wo für x und $f(x)$ keine Werte eingetragen sind, war nicht klar, ob hier nun Zahlen oder Variablen einzufüllen sind. Hier wird als Lösungsvorschlag auch einfach eine Abänderung der Aufgabenstellung als sinnvoll erachtet. Alternativ könnten man also schreiben: „Schreibe nun mathematisch mit Symbolen, indem du eigene Beispiele zur Situation von Elias findest. Vervollständige hierfür folgende Lücken passend mit Beispielzahlen.“

7 Fazit

Mathematik und Sprache als ein sich bedingendes Zusammenspiel zu erkennen, ist der erste Schritt in Richtung sprachsensibler Mathematikunterricht. Die Ergebnisse der empirischen Studie haben gezeigt, dass Schüler*innen sehr wohl von sprachsensiblem Lernmaterial profitieren. Es wurde die Hypothese aufgestellt, dass dies zwar eher der Fall ist, wenn den Lernenden die Themen neu sind, sie aber auf diese Weise Sprachhandlungen aufnehmen und mit diesen arbeiten. Führt man als Lehrperson also den Funktionsbegriff ein, so bietet diese Herangehensweise eine Chance, mit Sprache besser zu lernen. Auch die Tatsache, dass bei den Aufgaben „ein paar mehr Wörter benützt werden“, wurde bei den beiden Schülern als Hilfestellung wahrgenommen. Anzumerken ist ebenfalls, dass so Lernenden, die sich mit wortkargen, strikt mathematisch-symbolischen Aufgabenstellungen schwertun, die Gelegenheit zu Teil wird, Mathematik aus einer anderen Perspektive zu betrachten und so vielleicht bisher nicht verstandene Thematiken neu zu entdecken.

8 Literaturverzeichnis

Gasser, Magdalena (2019): „Sprachsensibler Mathematikunterricht. Untersuchung am Beispiel ausgewählter Themen der Sekundarstufe“, Fakultät für Mathematik, Informatik und Physik an der Universität Innsbruck.

Prediger, Susanne (2021): „Sprachbildender Mathematikunterricht“, Cornelsen, Berlin.

Zindl, Carina (2019): „Den Kern des Funktionsbegriffs verstehen. Eine Entwicklungsforschungsstudie zur fach- und sprachintegrierten Förderung“, Springer Spektrum, Dortmund.

Wessel, Lena (2015): „Fach- und sprachintegrierte Förderung durch Darstellungsvernetzung und Scaffolding. Ein Entwicklungsforschungsprojekt zum Anteilbegriff“, Springer Spektrum, Dortmund.

Nitsch, Renate (2014): „Diagnose von Lernschwierigkeiten im Bereich funktionale Zusammenhänge. Eine Studie zu typischen Fehlermustern bei Darstellungswechseln“, Springer Spektrum, Darmstadt.

Krosanke, Nadine (2021): „Entwicklung der professionellen Kompetenz von Mathematiklehramtsstudierenden zur Bedeutung von Sprache. Eine qualitative Studie zur professionellen Unterrichtswahrnehmung und der Kompetenz zur Analyse von Textaufgaben“, Springer Spektrum, Hamburg.

Greefrath, Gilbert, u. a. (2016): „Didaktik der Analysis. Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe“, Springer Spektrum, Berlin Heidelberg.

Zentgraf, Katharina & Prediger, Susanne (2021): „Funktionale Zusammenhänge am Sprachanfang. Baustein B – Funktionale Zusammenhänge zwischen Größen darstellen. Sprach- und fachintegriertes Fördermaterial“, Open Educational Ressource, zugänglich unter sima.dzlm.de/um.

Zentgraf, Katharina & Prediger, Susanne (2022): „Funktionale Zusammenhänge am Sprachanfang. Baustein B – Funktionale Zusammenhänge zwischen Größen darstellen. Sprach- und fachintegriertes Fördermaterial“, Open Educational Ressource, zugänglich unter sima.dzlm.de/um.

Beratungsgruppe Mathematik (2021): „Fachlehrplan Mathematik für die Sekundarstufe 1“, Zugriff: https://bgm.univie.ac.at/fileadmin/user_upload/p_bgm/LP_Sekundarstufe_1/LP_SEK_1.pdf, Universität Wien.