

# Überwinden von epistemologischen Denkhürden im Bereich des Bruch- und Prozentrechnens mittels Shiny Apps

Masterarbeit

-

in der Studienrichtung  
Lehramt Sekundarstufe (Allgemeinbildung)

-

zur Erlangung des akademischen Grades  
Master of Education (MEd)

-

eingereicht an der  
Fakultät für LehrerInnenbildung  
Institut für Fachdidaktik im Bereich DINGIM  
der Universität Innsbruck

-

von  
Julia Petz, BEd

-

Betreuer der Masterarbeit: Dr. Florian Stampfer

-

05. Juli 2021



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>Bruchzahlen und Bruchrechnung</b>	<b>15</b>
2.1	Aspekte der Bruchzahlen . . . . .	16
2.2	Grundvorstellungen . . . . .	23
2.3	Brüche in der Schule . . . . .	38
<b>3</b>	<b>Prozentzahlen und Prozentrechnung</b>	<b>57</b>
3.1	Aspekte der Prozentzahlen . . . . .	58
3.2	Grundvorstellungen . . . . .	60
3.3	Prozentrechnen in der Schule . . . . .	62
<b>4</b>	<b>Hürden beim Verständnis von Bruch- und Prozentzahlen</b>	<b>73</b>
4.1	Epistemologische Denkhürden . . . . .	73
4.2	Natural Number Bias . . . . .	80
<b>5</b>	<b>Forschungsinteresse</b>	<b>91</b>
<b>6</b>	<b>Inhalt der Lern-App</b>	<b>93</b>
6.1	Bereich Bruchzahlen . . . . .	94
6.2	Bereich Prozentzahlen . . . . .	96
<b>7</b>	<b>Technische Umsetzung der Lern-App</b>	<b>99</b>
7.1	Design . . . . .	100
7.2	Modularisierung . . . . .	104

7.3	Entwurfsentscheidungen und Konzepte . . . . .	108
7.4	Testen der Funktionalität . . . . .	111
7.5	Schwierigkeiten und Limitationen . . . . .	112
<b>8</b>	<b>Begleitstudie</b>	<b>115</b>
8.1	Design und Methode der Studie . . . . .	115
8.2	Ergebnisse . . . . .	116
8.3	Diskussion . . . . .	120
<b>9</b>	<b>Fazit</b>	<b>123</b>
<b>10</b>	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>127</b>
<b>11</b>	<b>Anhang</b>	<b>135</b>
11.1	Eidesstattliche Erklärung . . . . .	135
11.2	Entwurf der GUI . . . . .	136
11.3	Transkripte der Interviews . . . . .	139

# Tabellenverzeichnis

2.1	Typische Verwendungen von Brüchen [adaptiert von Padberg und Wartha (2017, S. 19-21) und Reinhold (2019, S. 36)] . . . . .	38
2.2	Typische Fehler bei der Verwendung ikonischer Repräsentationen [nach Eichelmann u. a. (2012)] . . . . .	49
2.3	Typische Fehler bei der Umwandlung von gemischten Zahlen [nach Eichelmann u. a. (2012)] . . . . .	50
2.4	Typische Fehler beim Größenvergleich von Brüchen [nach Reinhold (2019, S. 38)] . . . . .	51
2.5	Typische Fehler beim Erweitern von Brüchen [nach Eichelmann u. a. (2012)] . . . . .	51
2.6	Typische Fehler beim Kürzen von Brüchen [nach Eichelmann u. a. (2012)] . . . . .	52
2.7	Typische Fehler beim Addieren von Brüchen [nach Eichelmann u. a. (2012)] . . . . .	52
2.8	Typische Fehler beim Multiplizieren von Brüchen [nach Padberg (1986)] . . . . .	53
2.9	Typische Fehler beim Dividieren von Brüchen [nach Padberg (1986)] . . . . .	54
2.10	Typische Fehler bei Dezimalbrüchen [nach Padberg (2012)] . . . . .	54
3.1	Prozentzahlen in Bezug zu Bruchzahlen [nach Wartha und Wittmann (2009, S. 95)] . . . . .	58
4.1	Diskontinuitäten von Konzepten bei Zahlbereichserweiterung [nach Prediger (2007, S. 228)] . . . . .	77
4.2	Diskontinuitäten der Multiplikation für natürliche und rationale Zahlen [nach Prediger (2008, S. 14)] . . . . .	78
4.3	(Dis-)Kontinuitäten der natürlichen Zahlen und Prozentzahlen [nach Barratta u.a. (2010, S. 61) und Prediger (2008, S. 14)] . . . . .	80
4.4	Kongruente und inkongruente Aufgaben der vier Dimensionen des NNB [nach Reinhold (2019, S. 48)] . . . . .	84



# Abbildungsverzeichnis

2.1	Modellierungskreislauf mit Grundvorstellungen GV [entnommen aus vom Hofe und Blum (2016, S. 235)] . . . . .	25
2.2	Bruchzahl als Teil eines Ganzen [adaptiert von Malle (2004)] . . . . .	26
2.3	Bruchzahl als Teil eines diskreten Ganzen [adaptiert von Malle (2004)] . . . . .	26
2.4	Bruchzahl als Teil mehrerer Ganzer . . . . .	27
2.5	Bruchzahl als Vergleichsoperator [adaptiert von Malle (2004)] . . . . .	28
2.6	Bruchzahl als Resultat einer Division [adaptiert von Malle (2004)] . . . . .	28
2.7	Bruchzahl als Verhältnis [adaptiert von Malle (2004)] . . . . .	28
2.8	Bruchzahl als Verhältnis und Bruchzahl und Verhältnis . . . . .	29
2.9	Bruchzahl als Quasiordinalzahl (striker Sinn) [adaptiert von Malle (2004)] . . . . .	30
2.10	Bruchzahl als Quasiordinalzahl (statistischer Sinn) [adaptiert von Malle (2004)] . . . . .	30
2.11	Problematik bei der Addition zweier Brüche durch die Grundvorstellung des Bruchs als absoluten Anteil (statistischer Sinn) [adaptiert von Malle (2004)] . . . . .	31
2.12	Falten eines Papierbogens [entnommen aus Padberg und Wartha (2017, S. 42)] . . . . .	32
2.13	Vorwärts- und Rückwärtsschreiten als Rechenoperationen [adaptiert von Malle (2004)] . . . . .	33
2.14	Wiederholte Addition [adaptiert von Padberg und Wartha (2017, S. 105)] . . . . .	34
2.15	Von-Deutung [adaptiert von Padberg und Wartha (2017, S. 105)] . . . . .	34
2.16	Anteil vom Anteil [entnommen aus Padberg und Wartha (2017, S. 109)] . . . . .	34
2.17	Multiplikation über Flächeninhalt [entnommen aus Padberg und Wartha (2017, S. 111)] . . . . .	35
2.18	Dividieren als Messen [adaptiert von Malle (2004)] . . . . .	37
2.19	Trias bestehend aus Anteil, Ganzes und Teil [entnommen aus Noll (2020, S. 32)] . . . . .	39
2.20	Bruchstreifen und Zahlenstrahl [entnommen von Feijs u. a. (2008, S. 75)] . . . . .	41
2.21	Drei Konstellationen [entnommen von Padberg und Wartha (2017, S. 35)] . . . . .	41

2.22	Drei Konstellationen [entnommen von Beer u. a. (2019a, S. 158)] . . . . .	43
2.23	Äquivalenz von Brüchen [adaptiert von Beer u. a. (2019, S. 161)] . . . . .	43
2.24	Bruchzahlen am Zahlenstrahl [entnommen von Padberg und Wartha (2017, S. 37)] . . . . .	44
2.25	Bruchzahlen am Zahlenstrahl [entnommen von Beer (2019b, S. 52)] . . . . .	44
2.26	Residuale Strategie bei Brüchen . . . . .	45
2.27	Brüche mittels Bruchstreifen darstellen . . . . .	46
2.28	Wahl gemeinsamer Unterteilungen bei Brüchen . . . . .	46
2.29	Ergebnis der Bruchaddition zusammenfassen . . . . .	47
3.1	Prozentstreifen [entnommen aus Feijs u. a. (2008, S. 93)] . . . . .	61
3.2	Von-Hundert-Vorstellung . . . . .	62
3.3	Einführung der Prozentzahlen mittels Bruchdarstellung [entnommen von Greefrath (2018, S. 150)] . . . . .	65
3.4	Einführung Prozentzahl [entnommen von Beer u. a. (2019b, S. 208)] . . . . .	66
3.5	Vermehrter Grundwert (3.1) und (3.2) [entnommen von Hafner (2012, S. 41)] . . . . .	67
4.1	Epistemologische Denkhürden bei Anteilsvorstellung [adaptiert von Fauzi und Suryadi (2020, S. 58)] . . . . .	78
6.1	Aufgabe - Einzeichnen am Zahlenstrahl . . . . .	94
6.2	Aufgabe - Vergrößern und Verkleinern . . . . .	95
6.3	Aufgabe - Anteil diskreter Ganzer . . . . .	96
6.4	Aufgabe - Einzeichnen am Prozentstreifen . . . . .	97
6.5	Aufgabe - Auswahl des Prozentstreifens . . . . .	98
7.1	Definition der Farben . . . . .	101
7.2	Definition der Layouts . . . . .	101
7.3	Lernbegleiter Bruno . . . . .	102
7.4	Rohentwurf der GUI zur Aufgabe 'Anteil diskreter Ganzer' . . . . .	103
7.5	GUI zur Aufgabe 'Anteil diskreter Ganzer' . . . . .	104
7.6	Definition der verwendeten Module . . . . .	105
7.7	Erstellen eines Tests mit shinytest . . . . .	112
7.8	Modifizierte Snapshots von shinytest . . . . .	113
7.9	Problematik des Überschreibens der Achsenbeschriftung . . . . .	114



7.10 Problematik des Brush-Events . . . . . 114



# Kapitel 1

## Einleitung

Das Verständnis für rationale Zahlen ist im mathematischen Lernprozess essenziell (Christou et al., 2020; Obersteiner et al., 2016). Doch laut Reinhold (2019, S. 31) gilt dieser Zahlenbereich als ein schwieriger Teilbereich der mathematischen Grundbildung. Die Erweiterung von Zahlbereichen erfordert auch immer eine Erweiterung des Verständnisses dafür (Prediger, 2001). Diese Erweiterung – gerade im Hinblick auf die rationalen Zahlen – kann Irritationen erzeugen, weil Grunderfahrungen und -überzeugungen über mathematische Operationen in Frage gestellt werden (Padberg & Wartha, 2017, S. 4–6; Prediger, 2001). Bei den Zahlbereichserweiterungen kann es laut Hefendehl-Hebeker & Prediger (2006) zu Fehlvorstellungen kommen, da die Gedankenwelt der Lernenden erweitert und verändert wird. Arbeiten von Eichelmann et al. (2012), Fauzi & Suryadi (2020), Feijs et al. (2008) oder Prediger (2008) zeigen, dass die Problematik der rationalen Zahlen international auftritt. Basierend auf diesen bekannten Schwierigkeiten der Schüler\*innen weist die Fokussierung der *epistemologischen Denkhürden* der rationalen Zahlen eine hohe Relevanz auf. Laut G. Brousseau (1983) handelt es sich bei den *epistemologischen Denkhürden* um Schwierigkeiten, welche in der Disziplin der Mathematik selbst verankert sind und nicht auf den kognitiven Prozessen der Schüler\*innen basieren. Relevanz des Themas

Sowohl Padberg & Wartha (2017, S. 32) als auch Streit & Barzel (2013) sprechen von unterschiedlichen Schreibweisen beziehungsweise Gesichtern der rationalen Zahlen. So stellen die Bruchschreibweise und die Prozentschreibweise nur zwei der Möglichkeiten der Repräsentation der rationalen Zahlen dar. Eine weitere Schreibweise ist durch die Dezimalzahlen gegeben, wobei diese Repräsentation in der vorliegenden Arbeit nicht vorrangig behandelt wird, jedoch an ausgewählten Stellen berücksichtigt wird. Obwohl die Aufarbeitung der Grundvorstellungen und Denkhürden bezüglich der Dezimalzahlen didaktisches Potential birgt, fokussiert sich die Arbeit vermehrt auf Bruch- und Prozentschreibweisen. Durch das Betrachten von Brüchen mit Potenzen von 10 im Nenner fließen die Dezimalzahlen implizit in die Arbeit ein. Die Auswahl der Bruchschreibweise und Prozentschreibweise basiert unter anderem auf persönlichen Erfahrungen in diversen Schulpraktika beziehungsweise Nachhilfestunden und wurde basierend auf der Häufigkeit der Problemen mit diesen Schreibweisen als beachtenswerte Thematik angesehen. Weiters ist die Prozentrechnung ein Sonderfall der Bruchrechnung (Gudladt, 2021, S. 5). Die rationalen Zahlen werden in dieser Arbeit in die Bereiche Bruch- und Prozentzahlen unterteilt, da es auch zu einer unterrichtlichen Aufteilung kommt. Aufteilung in Bruch- und Prozentrechnung

Die innermathematische Gleichheit dieser beiden Bereiche ist gegeben, jedoch wird bei der Aufteilung die schulische Aufspaltung in Bruch- und Prozentrechnung verwendet. Weiters können die Grundvorstellungen beziehungsweise Schülerfehler und deren Gemeinsamkeiten sowie Unterschiede der Bereiche aufgezeigt werden. Trotz der Trennung im theoretischen Teil dieser Arbeit sollten für Schüler\*innen Vernetzungsmöglichkeiten geschaffen werden, da diese ansonsten Prozente, Brüche und Dezimalzahlen als voneinander getrennte mathematische Bereiche ohne Berührungspunkte interpretieren. Diese Vernetzungsmöglichkeit soll in der prototypischen Lern-App (*R Shiny App*) gegeben sein.

- persönliche Motivation Aus den Forschungsarbeiten von Autoren wie Ni & Zhou (2005), Feijs et al. (2008), Obersteiner et al. (2016) oder Reinhold & Reiss (2020) ergibt sich ein großes Interesse in diesem Bereich der Didaktik, andererseits können viele Ergebnisse der Forschenden durch eigene Erfahrungen gestützt und bestätigt werden. Vor allem die persönliche Erfahrung als Nachhilfelehrerin zeigt die Wichtigkeit mit der Beschäftigung von *epistemologischen Denkhürden*, wie beispielsweise dem *Natural Number Bias (NNB)*, bei den rationalen Zahlen. Fehlvorstellungen, wie „Multiplizieren vergrößert immer“ (Prediger, 2001) oder „Prozentsätze sind immer kleiner 100%“ (Pöhler, 2018, S. 30) kommen in Nachhilfestunden oder Schulpraktika immer wieder vor. Vor allem die bereits angesprochenen fehlenden Vernetzungsmöglichkeiten der unterschiedlichen Schreibweisen stellen Schüler\*innen vor Herausforderungen.
- App-unterstütztes Lernen Eine Möglichkeit diesen Herausforderungen im Unterricht zu begegnen ist der Einsatz von digitalen Unterrichtsmedien. Die Mathematikdidaktik blickt auf eine lange Tradition der Verwendung digitaler Unterrichtsmedien zurück (Reinhold, 2019, S. 136). Lernprogramme können laut Reinhold (2019, S. 136) in Form eines Tutors mit *Drill-and-Practice-Verfahren* und andererseits als Tool zur Vereinfachung oder Visualisierung verwendet werden. Das App-unterstützte Lernen ist somit ein Bestandteil des Lernens von Mathematik. Die Entwicklung einer interaktiven Lern-App soll einerseits zu einer Möglichkeit führen, die Schwierigkeiten der Schüler\*innen beim Umgang mit Bruch- und Prozentzahlen behandeln. Andererseits stellt die Lern-App eine Übungsmöglichkeit dar, welche zeitlich und räumlich vom Unterricht entkoppelt genutzt werden kann.
- Entwickeln der App Für die Entwicklung der Lern-App wird die Erweiterung *R Shiny* (Chang, 2021a) von *R* verwendet. Mithilfe von *R Shiny* können interaktive Web-Apps programmiert werden (Chang, 2021a), welche durch das Einbinden von HTML-, CSS- oder JavaScript-Komponenten auf die jeweilige Nutzung angepasst werden können (Wickham, 2021). Durch die Vorerfahrung der Entwicklung von *R Shiny Apps* wurde *R Shiny* als Implementierungsmöglichkeit gewählt, sodass sowohl auf bestehendes Vorwissen zurückgegriffen werden kann, sowie neue Lernerfahrungen geschaffen werden. Die Lern-App teilt sich in den Bereich der Bruch- und Prozentrechnung auf. Im Bereich der Bruchzahlen sprechen die entwickelten Aufgaben die holistische Betrachtungsweise von Brüchen auf dem Zahlenstrahl, das Vergrößern und Verkleinern durch Multiplikation mit Bruchzahlen und den Aspekt eines diskreten Ganzen an. Die Aufgaben zu den Prozentzahlen referenzieren einerseits die Betrachtung der Prozente als *Anteile* und andererseits das Zusammenspiel der drei formalbezogenen Konzepte.
- Zielsetzung Basierend auf diese Vorüberlegungen teilt sich die Zielsetzung der Arbeit in zwei Bereiche auf. Einerseits ist das Entwickeln eines prototypischen Modells einer webbasierten Lern-App mit *R Shiny* ein Hauptziel. Dafür werden basierend auf der ausgearbeiteten Literatur die Inhalte für die Lern-App identifiziert und dann technisch umgesetzt. Die Lern-App greift die *epistemologischen Denkhürden* der Bruch- und Prozentrechnung explizit auf. Obwohl das komplette Überwinden aller *epistemologischen Denkhürden* laut Obersteiner et al. (2013) nicht immer möglich ist, können die

Hürden durch ausreichend Erfahrung zumindest minimiert werden (Braithwaite & Siegler, 2018). Deshalb wird bei der Entwicklung der Lern-App das Erstellen von interaktiven Aufgaben zum *Überwinden* oder zumindest *Minimieren* der *epistemologischen Denkhürden* fokussiert. Um dieses Ziel zu erreichen, muss theoretische Vorarbeit geleistet werden. Dies beinhaltet die Auseinandersetzung mit den Grundvorstellungen, Fehlvorstellungen und *epistemologischen Denkhürden* der Bruch- sowie der Prozentrechnung. Basierend auf der theoretischen Ausarbeitung des Forschungsstandes werden die unterschiedlichen Aufgaben der Lern-App entwickelt, sodass diese die unterschiedlichen Problembereiche explizit referenzieren. Das zweite Ziel der vorliegenden Arbeit ist eine kleine Begleitstudie zur Lern-App. Dabei sollen die Fragen, ob und inwiefern die Lern-App praxisrelevante Schwierigkeiten im Bereich der Bruch- und Prozentrechnung aufgreift und wie passend die Lern-App für die Zielgruppe beziehungsweise die Praxistauglichkeit ist. Die Begleitstudie wurde – dem qualitativen Forschungsansatz folgend – mittels Interviews mit Lehrpersonen an Mittelschulen in Tirol durchgeführt.

Bei der vorliegenden Arbeit handelt es sich hauptsächlich um eine dokumentierte Entwicklungsarbeit einer Lern-App. Die ersten drei Kapitel der Arbeit beschreiben die theoretischen Grundlagen. Dazu werden zunächst die Aspekte, Grundvorstellungen und schulische Thematisierung der Bruchzahlen beziehungsweise -rechnung (Kapitel 2) und der Prozentzahlen und -rechnung (Kapitel 3) dargestellt. In Kapitel 4 werden die Verständnishürden für die beiden mathematischen Bereiche behandelt, welche die Grundlagen für die Auswahl und Erstellung der Aufgaben der Lern-App bilden. Anschließend wird in Kapitel 5 das Forschungsinteresse mit den konkreten Zielen der vorliegenden Arbeit dargestellt. Das Kapitel 6 beschreibt die entwickelten Aufgaben der Lern-App, mit den didaktischen Hintergründen und der generellen Funktionsweisen der interaktiven Parts. Nachfolgend wird in Kapitel 7 der Entwurf sowie die Implementierung und Funktionalitätstestung beschrieben. Somit stellt das Kapitel 7 die technische Umsetzung dar und ist vor allem eine informatische Beschreibung des Entwicklungsprozesses. Die Begleitstudie mit der Beschreibung des Designs, der Ergebnisse und einer kurzen Diskussion sind in Kapitel 8 beschrieben.

Aufbau der Arbeit



## Kapitel 2

# Bruchzahlen und Bruchrechnung

Das Verstehen von Bruchzahlen und der Bruchrechnung ist ein essenzielles Element im mathematischen Lernprozess und beeinflusst mathematische Leistungen (Christou et al., 2020). Der mathematische Inhalt stellt Schüler\*innen jedoch vor einige Probleme und Schwierigkeiten (Ni & Zhou, 2005). In diesem Kapitel werden die rationalen Zahlen zunächst aus formaler Sicht beleuchtet und adäquate Grundvorstellungen zu den Bruchzahlen an sich und deren Rechenoperationen beschrieben. Möglichkeiten für die schulische Einführung und etwaige typische Schülerfehler runden das Kapitel ab.

Trotz der Behauptung von Christou et al. (2020) stellt sich laut Padberg (2012, S. 1) die Gesellschaft die Frage, ob der hohe Anteil an Bruchrechnung in der Schule noch gerechtfertigt ist. Ein gängiges Argument gegen die Bruchrechnung ist die angenommene Irrelevanz für das alltägliche Leben (Padberg, 2012, S. 1). Durch die Betrachtung *einfacher* und *effizienter* Dezimalbrüche gelten gemeine Brüche auch als Relikte aus vergangenen Zeiten. Padberg (2012, S. 2) zieht hier unter anderem die Äquivalenz zu den römischen Zahlen, welche durch das dezimale Stellenwertsystem ersetzt wurden. Einen weiteren Vorwurf gegen die Bruchrechnung formuliert Padberg (2012, S. 3) als die Selektionswirkung von Brüchen. Argumente für die Bruchrechnung sind, dass gemeine Brüche eine fundierte Basis für die Dezimalbruchrechnung darstellen und dass die Wahrscheinlichkeitsrechnung ohne Bruchrechnung nur schwer abbildbar wäre (Padberg, 2012, S. 3–5). Weiters spielen die rationale Zahlen laut Padberg (2012, S. 7–10) im Bereich der Gleichungen und allgemein in der Algebra eine wichtige und nicht zu unterschätzende Rolle. Die Relevanz der Bruchrechnung ist aus mathematischer Sicht damit eindeutig gegeben.

Relevanz der Bruchrechnung

Die Mathematik der griechischen Antike beinhaltete keine Bruchzahlen, da für die damaligen Mathematiker\*innen nur die natürlichen Zahlen als Zahlen galten (Beutelspacher, 2018, S. 123). Probleme, welche rationaler Zahlen bedürfen, lösten die Griechen durch Verhältnisse natürlicher Zahlen (Beutelspacher, 2018, S. 123). Weiters führt Beutelspacher (2018) an, dass aus heutiger Sicht der Unterschied zwischen  $2 : 3$  und  $\frac{2}{3}$  marginal erscheint, aber für die Griechen das Verhältnis eben nicht als eigenständige Zahl gedeutet wurde. Die Ägypter entwickelten über tausend Jahre vor den Griechen eine Möglichkeit zur Bruchrechnung, wobei sie sich ausschließlich auf Stammbrüche spezialisierten (Beutelspacher, 2018, S. 123). Eine bekannte Quelle dieser Rechenweise ist das aus dem Jahr 1650 v. Chr. stammende „Papyrus Rhind“ (Beutelspacher, 2018, S. 124). Im Mittelalter wur-

geschichtlicher Exkurs

de rationale Zahlen bereist selbstverständlich gehandhabt, was die Rechenbücher von Adam Ries belegen (Reiss & Schmieder, 2014, S. 266).

## 2.1 Aspekte der Bruchzahlen

Konstruktion rationaler  
Zahlen

Die Mathematik agiert bei der Konstruktion neuer Inhalte auf einem einfachen Grundsatz: Man schafft Neues, indem man auf Altem aufbaut (Beutelspacher, 2018, S. 124). Dieser Grundsatz ist auch bei der Konstruktion der rationalen Zahlen anwendbar, denn diese basieren auf den ganzen Zahlen und deren Eigenschaften (Beutelspacher, 2018, S. 124). Durch den Übergang von den ganzen Zahlen zu den rationalen Zahlen findet eine Zahlbereichserweiterung statt. Nach Reiss & Schmieder (2014) und Schubert (2012) kann diese Zahlbereichserweiterung anhand einer Gleichung exemplarisch gezeigt werden: Die Lösung der Gleichung (2.1) wird gesucht, wobei  $a, b \in \mathbb{Z}$  gilt.

$$a = b \cdot x \tag{2.1}$$

Im weiteren Laufe wird ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen, dass  $b \neq 0$ . Falls  $b = 0$  gelten sollte, ist die Gleichung entweder nicht lösbar ( $a \neq 0$ ) oder nicht eindeutig lösbar ( $a = 0$ ). Um zur Definition der rationalen Zahlen zu kommen, werden nach Reiss & Schmieder (2014, S. 262) die „zu beschreibenden Objekte (also die rationalen Zahlen) mit Gleichungen (des Types  $a = b \cdot x$ ) identifiziert“. Gleichungen sollen als äquivalent angesehen werden, wenn sie für ein und dasselbe  $x$  erfüllt sind. Wie beispielsweise:

$$\begin{aligned} 2 &= 6x \\ 8 &= 24x \\ 12 &= 36x \end{aligned}$$

Die Angabe von Kriterien für äquivalente Gleichungen ist ein wesentlicher Bestandteil der folgenden Definition (Reiss & Schmieder, 2014, S. 262).

Definition Äquivalenz-  
relation

Basierend der Vorüberlegungen mit der Gleichung wird eine Äquivalenzrelation definiert. Auf der Menge  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\} = \{(z_1, z_2) | z_1 \in \mathbb{Z}, z_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$  ist mittels

$$(a, b) \sim (c, d) :\Leftrightarrow ad = bc \tag{2.2}$$

eine Äquivalenzrelation gegeben. Diese Äquivalenzrelation erfüllt auch die Kriterien reflexiv, symmetrisch und transitiv. Da die Eigenschaften der Äquivalenzrelation essenziell für weitere Definitionen und das weitere Verständnis sind, werden diese kurz bewiesen:

- **Reflexivität:** Da für alle  $a \in \mathbb{Z}$  und  $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  die Äquivalenz  $(a, b) \sim (a, b)$  zu  $ab = ba$  führt, ist die Reflexivität erfüllt.
- **Symmetrie:** Die Aussage  $(c, d) \sim (a, b)$  führt zu  $cb = da$  für alle  $a, c \in \mathbb{Z}$  und  $b, d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Aufgrund der Reflexivität gilt auch  $ad = bc$ , was  $(a, b) \sim (c, d)$  bedeutet. Dadurch ist die Äquivalenzrelation (2.2) symmetrisch.



- **Transitivität:** Es seien  $(a, b) \sim (c, d)$  und  $(c, d) \sim (e, f)$  mit  $a, c, e \in \mathbb{Z}$  und  $b, d, f \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Durch  $ad = bc$  und  $cf = de$  gilt auch  $adf = bcf$  und  $bcf = bde$ . Dann gilt auch  $adf = bde$  und somit  $(af - be) \cdot d = 0$ . Da  $d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  gilt nach dem Produkt-Null-Satz  $af - be = 0$  und somit  $af = be$ . Dadurch ist auch die Transitivität gezeigt.

Laut Reiss & Schmieder (2014, S. 263) wird durch die Selbstverständlichkeit und Einfachheit des Beweises oftmals die Tatsache übersehen, dass die Kommutativität der Multiplikation in  $\mathbb{Z}$  eine große Rolle spielt. Weiters führen sie an, dass hier ersichtlich wird, dass auf Eigenschaften eines bereits konstruierten und bekannten Zahlbereichs zurückgegriffen wird.

Ausgehend auf der bereits definierten Äquivalenzklasse ist die Menge der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  Menge der rationalen Zahlen definiert als die Menge aller Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation (Reinhold, 2019, S. 34; Reiss & Schmieder, 2014, S. 264). Somit gilt

$$\mathbb{Q} := \{[(a, b)] \mid (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}\} \quad (2.3)$$

mit

$$\begin{aligned} [(a, b)] &= \{(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\} \mid (a, b) \sim (c, d)\} \\ &= \{(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\} \mid ad = bc\} \end{aligned}$$

für die Paare  $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  (Reiss & Schmieder, 2014, S. 264).

Die Äquivalenzrelation darf maximal auf die Menge  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  ausgeweitet werden (Toenniessen, 2019, S. 58). Wenn die Äquivalenz auf  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  definiert wäre, gibt Toenniessen (2019, S. 58) an, dass man mit der Menge nicht mehr operieren könnte. Bei näherer Betrachtung der Äquivalenzklasse von  $(0, 0)$  wäre jedes Paar  $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  äquivalent zu  $(0, 0)$ . Denn es gilt

$$a \cdot 0 = 0 \cdot b$$

für alle  $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Dadurch hätte die Menge  $\mathbb{Q}$  nur ein einziges Element. Laut Toenniessen (2019, S. 58) ist das der tieferliegende Grund, dass die „Division durch 0“ nicht sinnvoll ist.

Um mit den Elementen von  $\mathbb{Q}$  operieren zu können, müssen die beiden Rechenoperationen Addition und Multiplikation eingeführt werden. Auch diese Rechenoperationen müssen in den Äquivalenzklassen definiert werden (Reiss & Schmieder, 2014, S. 264). Für  $[(a, b)], [(c, d)] \in \mathbb{Q}$  sei durch

$$[(a, b)] \oplus [(c, d)] := [(ad + bc, bd)] \quad (2.4)$$

die Addition und durch

$$[(a, b)] \odot [(c, d)] := [(ac, bd)] \quad (2.5)$$

die Multiplikation definiert (Reiss & Schmieder, 2014, S. 264–265). Die Definitionen (2.4) und (2.5) greifen auf die Elemente (Repräsentanten) der Äquivalenzklassen zurück. Dadurch sind die Summe bzw. das Produkt nicht von der Wahl der Paare abhängig. Die Rechenoperationen sind wohldefiniert (Reiss & Schmieder, 2014, S. 265). Die Operationen Addition  $\oplus$  und Multiplikation  $\odot$  machen das Tripel  $(\mathbb{Q}, \oplus, \odot)$  zu einem algebraischen Körper (Reinhold, 2019, S. 34). Dies bedeutet unter anderem, dass die Rechenoperationen, wie in (2.4) und (2.5) definiert, kommutativ und assoziativ sind. Für  $[(a, b)], [(c, d)], [(e, f)] \in \mathbb{Q}$  gilt demnach

$$\begin{aligned} [(a, b)] \oplus [(c, d)] &= [(c, d)] \oplus [(a, b)] \\ [(a, b)] \odot [(c, d)] &= [(c, d)] \odot [(a, b)] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} [(a, b)] \oplus ([(c, d)] \oplus [(e, f)]) &= (([a, b] \oplus [(c, d)]) \oplus [(e, f)]) \\ [(a, b)] \odot ([(c, d)] \odot [(e, f)]) &= (([a, b] \odot [(c, d)]) \odot [(e, f)]). \end{aligned}$$

Weiters muss es sowohl ein neutrales Element als auch ein inverses Element bezogen auf die Addition beziehungsweise die Multiplikation geben, um einem algebraischen Körper Genüge zu tun. Für alle  $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  sind folgende Rechenregeln erfüllt:

1.  $[(a, b)] \oplus [(0, 1)] = [(a, b)] \rightarrow$  Das neutrale Element von  $\oplus$  ist die Zahl  $0 = \frac{0}{1}$ .
2.  $[(a, b)] \oplus [(-a, b)] = [(0, 1)] \rightarrow$  Es gibt zu jedem Element in  $\mathbb{Q}$  ein inverses Element bezüglich der Addition.
3.  $[(a, b)] \odot [(1, 1)] = [(a, b)] \rightarrow$  Das neutrale Element von  $\odot$  ist die Zahl  $1 = \frac{1}{1}$ .
4.  $[(a, b)] \odot [(b, a)] = [(1, 1)]$ , falls  $a \neq 0$  ist  $\rightarrow$  Es gibt zu jedem Element in  $\mathbb{Q}$  ein inverses Element bezüglich der Multiplikation.

Auf Beweise dieser Eigenschaften wird in dieser Arbeit verzichtet, jedoch kann auf die Arbeiten von Reiss & Schmieder (2014) und Beutelspacher (2018) verwiesen werden.

#### Größenvergleich

Das Permanenzprinzip fordert, dass bei einer Zahlbereichserweiterung möglichst alle Eigenschaften des ursprünglichen Zahlbereichs erhalten bleiben (Padberg & Wartha, 2017, S. 12). Diese Forderung wird bei den Rechenoperationen in  $\mathbb{Q}$  erfüllt. Laut Beutelspacher (2018, S. 136) fällt der Größenvergleich von Brüchen hingegen nicht mehr in das Schema des Permanenzprinzips. Er nennt hier das – bis vor der Zahlbereichserweiterung – unbekannte Phänomen, dass der Zähler und der Nenner sehr große Zahlen sein können, aber die dargestellte Bruchzahl sehr klein ist. Nach Reiss & Schmieder (2014, S. 270) lässt sich die Ordnungsrelation  $\leq$  von  $\mathbb{Z}$  auf  $\mathbb{Q}$  übertragen, da die Anordnung auf die Anordnung der ganzen Zahlen zurückgeführt wird. Die Autoren formulieren folgende Definition: Es seien  $a, c \in \mathbb{Z}$  und  $b, d \in \mathbb{N}$ , wenn

$$x = \frac{a}{b} \text{ und } y = \frac{c}{d}$$

erfüllt ist, dann gelte

$$x \leq y, \text{ falls } ad \leq bc$$

ist. Auch diese Definition hängt nur von der Äquivalenzklasse der Paare ab und nicht von speziellen Repräsentanten (Reiss & Schmieder, 2014, S. 270). Die Elemente in  $\mathbb{Q}$  lassen sich vergleichen, da  $\mathbb{Q}$  eine von  $\mathbb{R}$  induzierte totale Ordnung aufweist (Pöschel, 2014, S. 71).

Die formale Definition (2.3) von  $\mathbb{Q}$  ist die Basis für die Bruchschreibweise  $\frac{a}{b}$  (Reinhold, 2019, S. 34). Beispielsweise ist der Bruch  $\frac{3}{4}$  ein Repräsentant der Äquivalenzklasse Bruchschreibweise

$$\left[ \frac{3}{4} \right] := [(3, 4)] = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\} \mid 3 \cdot y = 4 \cdot x\}.$$

Da es bei  $\mathbb{Q}$  um eine Zahlbereichserweiterung von  $\mathbb{Z}$  handelt, können auch die Elemente aus  $\mathbb{Z}$  dargestellt werden. Dabei wird für 0 der Bruch  $\frac{0}{1}$  und für 1 der Bruch  $\frac{1}{1}$  geschrieben. Allgemein formuliert wird mit  $n \in \mathbb{Z}$  der Bruch  $\frac{n}{1}$  assoziiert. Das inverse Element der Addition zu  $\frac{a}{b}$  ist  $-\frac{a}{b} := \frac{-a}{b}$ . Und für die multiplikative Inverse zu  $\frac{a}{b}$  gilt  $(\frac{a}{b})^{-1} := \frac{b}{a}$ , falls  $a \neq 0$  ist.

Nach Beutelspacher (2018, S. 125) ist die Beziehung zwischen Brüchen und Bruchzahlen diffizil: Jeder Bruch stellt eine Bruchzahl dar, aber die Vorstellung der Äquivalenz ist schwierig. Die Problematik in diesem Gebiet ist unter anderem, dass die Begriffe *Bruch* und *Bruchzahl* synonym verwendet werden (Reinhold, 2019, S. 34). Aber auch das Verhältnis von *Bruch* und *rationaler Zahl* ist laut Ni & Zhou (2005) komplex. Ni & Zhou (2005, S. 29) argumentieren: „The term ‘fractions’ and ‘rational numbers’ are two genuinely associated, but nonexchangeable, terms from both a mathematical and a psychological point of view.“ Brüche und Bruchzahlen

Beim Aufbau des Zahlensystems wurde stillschweigend eine bestimmte Darstellung der Zahlen verwendet, und zwar die Dezimaldarstellung (Toenniessen, 2019, S. 67). Um die Dezimaldarstellung einer rationalen Zahl, welche durch ein Paar ganzer Zahlen  $(a, b)$  mit  $b \neq 0$  gegeben ist, zu erhalten, wird die Division mit Rest herangezogen (Reiss & Schmieder, 2014, S. 274). Das von Reiss & Schmieder (2014, S. 274) dargestellte Verfahren funktioniert wie folgt: Sei eine rationale Zahl  $\frac{a}{b}$  gegeben, wobei  $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Dezimaldarstellung

*Schritt I:*  $\exists n, r \in \mathbb{N}_0$  mit  $r < b$  und

$$a = n \cdot b + r.$$

Falls  $r = 0$  ist, bricht der Algorithmus ab, da  $\frac{a}{b} = n$  gilt. Dadurch ist die Dezimaldarstellung gefunden.

*Schritt II:* Ist  $r \neq 0$ , so existiert für die Zahl  $10 \cdot r$  eine Darstellung

$$10 \cdot r = a_1 \cdot b + r_1$$

mit  $a_1, r_1 \in \mathbb{N}_0$  und  $r_1 < b$ . Aufgrund  $r < b$  muss  $a_1 < 10$  sein und es gilt  $a_1 \in \{0, 1, \dots, 9\}$ . Daraus folgt

$$\frac{a}{b} = n + \frac{r}{b} = n + \frac{a_1}{10} + \frac{r_1}{10 \cdot b}.$$

Falls  $r_1 = 0$  ist, bricht der Algorithmus ab, da  $\frac{a}{b} = n + \frac{a_1}{10}$  gilt. Dadurch ist die Dezimaldarstellung gefunden.

*Schritt III:* Ist  $r_1 \neq 0$ , so existiert für die Zahl  $10 \cdot r_1$  eine Darstellung

$$10 \cdot r_1 = a_2 \cdot b + r_2$$

mit  $a_2, r_2 \in \mathbb{N}_0$  und  $r_2 < b$ . Aufgrund  $r_1 < b$  muss  $a_2 < 10$  sein und es gilt  $a_2 \in \{0, 1, \dots, 9\}$ . Daraus folgt

$$\frac{a}{b} = n + \frac{a_1}{10} + \frac{r_1}{10 \cdot b} = n + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \frac{r_2}{100 \cdot b}.$$

Falls  $r_2 = 0$  ist, bricht der Algorithmus ab, da  $\frac{a}{b} = n + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100}$  gilt. Dadurch ist die Dezimaldarstellung gefunden.

*Weitere Schritte:* Die Fortsetzung des Verfahrens liefert die Dezimaldarstellung

$$\frac{a}{b} = n + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \frac{a_3}{1000} + \frac{a_4}{10000} + \frac{a_5}{100000} + \dots$$

Zusammengefasst entspricht das Vorgehen dem Schema der schriftlichen Division (Reiss & Schmieder, 2014, S. 275). Laut Toenniessen (2019, S. 69) lassen sich rationale Zahlen  $\frac{a}{b}$  genau dann als Dezimalbruch darstellen, wenn sämtliche Primfaktoren von  $b$ , die ungleich 2 oder 5 sind, auch in  $a$  vorkommen und sich dadurch herauskürzen lassen.

Abzählbarkeit der rationalen Zahlen

Die Menge der rationalen Zahlen ( $\mathbb{Q}$ ) ist abzählbar, da es eine Bijektion zwischen  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{Z}$  gibt (Pöschel, 2014, S. 76). Zum Beweis wird das Cantorsche Diagonalverfahren herangezogen (Pöschel, 2014, S. 76). Natürlich Zahlen und rationale Zahlen haben somit die gleiche Mächtigkeit (Reiss & Schmieder, 2014, S. 284). Weiters führen die Autoren an, dass  $\mathbb{Q}$  gegenüber  $\mathbb{R}$  eine kleine Menge ist.

### 2.1.1 Konzepte des Bruchrechnens

Laut Padberg & Wartha (2017, S. 22) stützt sich die Bruchrechnung im Mathematikunterricht vor allem auf die Grundvorstellung des *Bruchs als Anteil* und ergänzend auf die Grundvorstellung des *Bruchs als Operator*. Insgesamt kann von vier grundlegenden Konzepten bezüglich der Behandlung

der Bruchrechnung gesprochen werden. Teilweise wurde die Konzepte bereits erwähnt, sollen aber an dieser Stelle in gesammelter Form dargestellt werden.

Ein möglicher Zugang zur Bruchrechnung ist das *Größenkonzept*. Laut Schlögl (2018, S. 23) liegt der wesentliche Vorteil des Konzepts darin, dass die Anwendungsorientierung und der Bezug zum alltäglichen Leben der Schüler\*innen gegeben ist. Konkrete Beispiele des Größenkonzepts sind Brüche wie  $\frac{1}{2}$  kg oder  $\frac{3}{4}$  h (Padberg, 2012, S. 14; Schlögl, 2018, S. 23). Das Größenkonzept sieht Bruchzahlen laut Schlögl (2018, S. 23–24) als Größe in der Form  $\frac{m}{n}E$  an, wobei  $E$  die Bezugsgröße oder Einheit darstellt. Padberg & Wartha (2017, S. 20) fassen dieses Konzept unter *Bruch als Maßzahl* zusammen. Auch sie sehen Brüche in diesem als Größen, da diese Maßeinheiten aufweisen und in Sachsituationen eingebettet sind. Weiters gibt Padberg (2012, S. 14) an, dass das Größenkonzept aufgrund der Anschaulichkeit bei den Rechenoperationen Addition und Subtraktion hilfreich ist. Jedoch treten Herausforderungen bei der Multiplikation und der Division auf, da das Größenkonzept in diesen Fällen nicht mehr sinnführend ist. Bezogen auf das Größenkonzept macht das Produkt

$$\frac{1}{2} \text{ Kuchen} \cdot \frac{1}{2} \text{ Kuchen}$$

keinen Sinn (Padberg, 2012, S. 14; Schlögl, 2018, S. 24). Eine Umdeutung hin zum „*Von-Ansatz*“ verleiht der Aufgabe mehr Sinnhaftigkeit, da der erste Bruch dementsprechend kein Größe mehr, sondern ein Operator ist. Die Aufgabe transformiert sich nach Schlögl (2018, S. 24) folgendermaßen:

$$\frac{1}{2} \text{ von } \frac{1}{2} \text{ Kuchen}$$

Die Transformation der Aufgabe führt nach Schlögl (2018, S. 24) zum nächsten Konzept.

Das Operatorkonzept versteht unter einem Bruch eine Funktion, welche auf Größen oder Zahlen wirkt (Wartha & Güse, 2009). Wartha (2009) ergänzen, dass ein Bruch eine dimensionslose Zahlfunktion ist, die einen Grundwert auf einen Anteil abbildet. Dadurch beschreibt laut Wartha (2009) diese Grundvorstellung den Bruch als Änderung beziehungsweise als Handlung selbst. Sowohl Wartha (2009) als auch Padberg & Wartha (2017, S. 22) betonen, dass das Operatorkonzept insbesondere bei der Multiplikation von Brüchen eine essenzielle Rolle spielt. Padberg (2012, S. 15) und Schlögl (2018, S. 24) induzieren eine andere Sprechweise, bezogen auf das Konzept: Aus der Sprechweise

$$\frac{3}{4} \text{ von } 6 \text{ kg sind } 4\text{kg}$$

wird durch die Sicht des Bruchs als Funktion

$$\frac{3}{4} \text{ von der Größe } 6 \text{ kg wird die Größe } 4\text{kg zugeordnet.}$$

Aus „ $\frac{3}{4}$  von“ wird dadurch der Bruchoperator  $(\cdot\frac{3}{4})$  mit dem Divisionsoperator  $(:4)$  und dem Multiplikationsoperator  $(\cdot 3)$  (Schlögl, 2018, S. 24). Nach Schlögl (2018, S. 24) bedeutet das, dass man den vierten Teil nimmt und dann diesen Teil verdreifacht. Unter Verwendung des Verkettungssymbols  $\circ$  gilt  $(\cdot\frac{3}{4}) = (:3) \circ (\cdot 2)$ . Essenziell für das Verständnis des Operatorkonzeptes ist die Vertauschbarkeit des Divisionsoperators und des Multiplikationsoperators (Schlögl, 2018, S. 24). Allgemein formuliert, gilt für  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  und  $g$  als Größe, wie Gewicht, Länge etc.

$$(\cdot\frac{m}{n})(g) = (g : n) \cdot m = (g \cdot m) : n.$$

Das Operatorkonzept verursachte in seiner reinen Form schwerwiegende Probleme, bezogen auf das Verständnis, vor allem, da die Anteil-Grundvorstellung nur eine untergeordnete Rolle spielte (Padberg & Wartha, 2017, S. 23). Weiters merken die Autoren an, dass die Anteil- und die Operatorvorstellung eng zusammenhängen. Dabei betont die Operator-Grundvorstellung nach Padberg & Wartha (2017, S. 23) stärker die Herstellung und in diesem Sinne die dynamische Komponente, während die Anteil-Grundvorstellung stärker auf das Ergebnis und die statische Komponente bei Brüchen fokussiert.

Gleichungskonzept

Das Gleichungskonzept ist eine weitere Konzeption zur Behandlung der Bruchrechnung, welche im Gegensatz zum Operatorkonzept keinen expliziten Eingang in die Schulbücher gefunden hat (Padberg & Wartha, 2017, S. 23). Bruchzahlen werden beim Gleichungskonzept als Lösungen linearer Gleichungen eingeführt, wie beispielsweise

$$\frac{3}{4} \text{ als Lösung von } 4 \cdot x = 3$$

(Padberg & Wartha, 2017, S. 23). Allgemein formuliert entspricht diesem Schema folgendes Vorgehen: Gegeben ist eine lineare Gleichung

$$n \cdot x = m$$

wobei  $m, n \in \mathbb{N}$  gilt. Beim Auflösen der Gleichung nach  $x$

$$x = m : n = \frac{m}{n}$$

stellt der Bruch  $\frac{m}{n}$  die Lösung der Gleichung dar (Schlögl, 2018, S. 27). Das Erweitern und das Kürzen von Brüchen, sowie die Rechenoperationen lassen sich auf dieser Basis mehr oder weniger gut einführen (Padberg & Wartha, 2017, S. 23; Schlögl, 2018, S. 27). Padberg & Wartha (2017, S. 23) merken jedoch kritisch an, dass aus der Fülle von Bruchzahlaspekten nur ein einziger und nicht besonders weit vernetzter Aspekt herausgegriffen wird. Dadurch ist der Aufbau der kompletten Bruchrechnung auf diesem Konzept zu einseitig, zu formal und wird der Palette an Aspekten der

Bruchrechnung nicht gerecht (Padberg & Wartha, 2017, S. 23). Schlögl (2018, S. 27) führt noch die geringe Anwendungsbezogenheit dieses Konzepts als negativen Aspekt an.

Das Äquivalenzklassenkonzept stellt den fachlich „sauberen“ Zugang über Äquivalenzklassen in den Fokus (Padberg & Wartha, 2017, S. 23; Schlögl, 2018, S. 28). Eine Bruchzahl wird als Klasse gleichwertiger und dadurch äquivalenter Brüche angesehen (Padberg & Wartha, 2017, S. 23). Dieser Zugang entspricht der Einführung der Bruchzahlen und rationaler Zahlen aus der Definition (2.3). Dieser Zugang zu den Bruchzahlen ist an Universitäten weit verbreitet, durch den hohen Abstraktionsgrad spielt er in der Schulmathematik jedoch kaum eine Rolle (Padberg & Wartha, 2017, S. 23; Schlögl, 2018, S. 29). Padberg & Wartha (2017, S. 23), Schlögl (2018, S. 29) und Reinhold (2019, S. 34) sehen keine Möglichkeit das Äquivalenzklassenkonzept so zu adaptieren, um eine Basis für die Entwicklung mathematischen Verständnisses darstellen zu können.

Äquivalenzklassen-  
konzept

## 2.2 Grundvorstellungen

Konkrete und intuitive Vorstellungen mathematischer Inhalte werden – vor allem im deutschsprachigen Raum – mit dem Begriff *Grundvorstellung* charakterisiert (Reinhold, 2019, S. 21). Laut vom Hofe (1995, S. 98) beschreiben Grundvorstellungen „*Elemente der Vermittlung bzw. ... Objekte des Übergangs zwischen der Welt der Mathematik und der individuellen Begriffsbildung des Lernenden*“. Griesel et al. (2019) betonen besonders, dass es sich bei Grundvorstellungen um *mentale* Repräsentationen mathematischer Objekte und Sachverhalte handelt – im Fokus stehen somit gedankliche Konstrukte. Weiters bemerken sie, dass Grundvorstellungen die Präzision des im allgemeinen Sprachgebrauch verwendeten Begriffs des *intuitiven Verständnisses* darstellen soll.

Definition

Auf das Prinzip der Grundvorstellungen gibt es zwei unterschiedliche Perspektiven, welche historisch gewachsen sind (vom Hofe & Blum, 2016). So beschreiben die Autoren, dass bis in die 1980er das Konzept in normativem Sinne verwendet wurde: Grundvorstellungen wurden als didaktische Kategorien benutzt, welche den Weg weisen, wie Schüler\*innen unterrichtet werden müssen, um zu einem konzeptuellen Verständnis zu gelangen. Die Frage, welche mentale Repräsentationen Schüler\*innen tatsächlich bilden, und damit auch die Frage, welche Arten von Fehldarstellungen sie haben, wurde laut vom Hofe & Blum (2016) selten behandelt. Durch den wachsenden Einfluss von deskriptiven Studien und dem Interesse an den Lernprozessen der Schüler\*innen wurde den Grundvorstellungen eine weitere Perspektive gegeben (vom Hofe & Blum, 2016). Weiters beschreibt vom Hofe (1995) die systemische Unterscheidung zwischen dem deskriptiven und dem normativen Aspekt des Konzepts der Grundvorstellungen wie folgt:

normative und deskrip-  
tive Aspekte

- Der **normative Aspekt** fungiert als pädagogische Leitlinie, welche auf ein Bildungsziel ausgerichtet ist. Die Grundvorstellungen sind dabei *adäquate Interpretationen* der Verwendung mathematischer Konzepte in einem fachlichen Kontext.
- Der **deskriptive Aspekt** erlaubt die Charakterisierung der mentalen Repräsentationen der Lernenden. Dabei werden Informationen über die *individuellen Bilder* und *Erklärungsmodelle* der einzelnen Lernenden bereitgestellt. Diese mentalen Repräsentationen weichen mehr oder weniger von den Grundvorstellungen ab, welche als normative Leitlinien gedacht sind.

Letztendlich fügen vom Hofe & Blum (2016) erklärend an, dass es sich bei den Aspekten nicht

um unterschiedliche Arten der Grundvorstellung handelt, sondern um unterschiedliche Arten des Arbeitens mit dem Konzept der Grundvorstellungen.

Rolle der Grundvorstellungen Bei der Entwicklung von tragfähigen mathematischen Konzepten nimmt die Ausbildung normativer Grundvorstellungen eine wesentliche Rolle ein (Reinhold, 2019, S. 21). Nach vom Hofe (1995) lässt sich das Konzept der Grundvorstellungen in drei Hauptmerkmale zusammenfassen, welche nach Reinhold (2019, S. 21–22) auch die Rolle der Grundvorstellungen definieren:

- **Sinnkonstruierung:** Eine Rolle der Grundvorstellungen ist der Aufbau eines Sinngehaltes mathematischer Konzepte basierend auf vertrauten Konzepten und Erfahrungen.
- **Anschaulichkeit:** Verallgemeinerte mentale Darstellungen, die Denken auf formaler-operativer Art und Weise ermöglichen können, werden erzeugt.
- **Anwendungsbezug:** Der Anwendungsbezug referenziert auf die Fähigkeit, ein Konzept auf die Realität zu übertragen, indem grundlegende Strukturen in realweltlichen Kontexten erkannt beziehungsweise reale Begebenheiten mittels mathematischer Strukturen modelliert werden.

Diese Rollen der Grundvorstellungen zeigen nach Reinhold (2019, S. 22) auf, dass Grundvorstellungen eine ziel- und prozessorientierte Ausrichtung aufweisen, welche weitreichendes mathematisches *Verständnis* im Gegensatz zu bloßem mathematischem *Können* ermöglicht (Padberg & Wartha, 2017; Reinhold, 2019).

primäre und sekundäre Grundvorstellungen Grundvorstellungen können in primär und sekundär unterteilt werden (vom Hofe & Blum, 2016). Primäre Grundvorstellungen sollen sich aus dem Wissen der Schüler\*innen ableiten und sind dadurch direkt mit der gegenständlichen Handlungserfahrung verbunden (Vohns, 2005). Diese Handlungserfahrung kann sich beispielsweise auf das Aufteilen von realen Mengen an Dingen beziehen (vom Hofe & Blum, 2016). Weiters geben vom Hofe & Blum (2016) an, dass primäre Grundvorstellungen einen repräsentativen Charakter haben. Im Gegensatz dazu stammen sekundäre Grundvorstellungen aus mathematischen Unterweisungen und sind demnach nicht mit konkreten Handlungsvorstellungen, sondern mit Vorstellungen mit mathematischen Darstellungsmitteln (Zahlenstrahl, Graphen, Koordinatensystem etc.) verbunden (Vohns, 2005). Aus diesem Grund sprechen vom Hofe & Blum (2016) bei sekundären Grundvorstellungen auch vom symbolischen Charakter.

Grundvorstellungen und Modellierung Grundvorstellungen spielen auch im Modellierungskreislauf eine Rolle (Wartha & Güse, 2009). Sowohl beim Übergang von der realen Welt in die Mathematik als auch beim Übersetzen der mathematischen Resultate in realweltliche Bezüge beeinflussen Grundvorstellungen die Prozesse *Mathematisieren* und *Interpretieren* (vom Hofe & Blum, 2016; Wartha, 2009; Wartha & Güse, 2009). Grundvorstellungen beziehen sich nicht nur auf diese Übersetzungsprozesse zwischen der realen Welt und der Mathematik, sondern gelten als Voraussetzung für das Überwinden dieser Schnittstellen (Wartha, 2009). Um diese Schnittstellen zu überwinden, benötigt man nach vom Hofe & Blum (2016, S. 235) „*mental representations of which mathematical content or method can fit a particular problem situation, or, vice versa, which problem situations can be modelled with specific mathematical content*“. Während bei Wartha (2009) die Grundvorstellungen vor allem bei den Schnittstellen benötigt werden, beziehen vom Hofe & Blum (2016) die Grundvorstellungen auch beim mathematischen Arbeiten mit ein (vgl. 2.1).



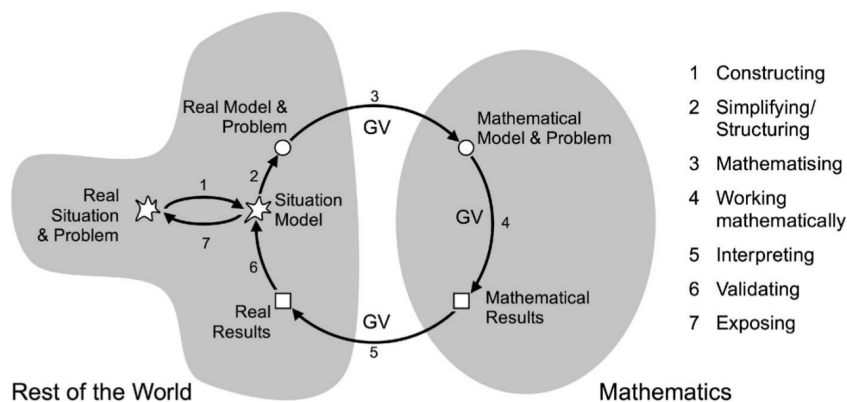


Abbildung 2.1: Modellierungskreislauf mit Grundvorstellungen GV [entnommen aus vom Hofe und Blum (2016, S. 235)]

## 2.2.1 Grundvorstellungen zum Zahlbereich

In diesem Abschnitt werden verschiedene Grundvorstellungen zu Bruchzahlen und deren Rechenoperationen konkret dargestellt. Dabei werden die Grundvorstellungen – ähnlich bei Noll (2020) – als mentales Modell, das zum erfolgreichen Lösen einer mathematischen Aufgabe aktiviert wird, angesehen. Bei der folgenden Darstellung wird kein Anspruch auf Vollständigkeit erhoben. Jedoch zeigen die angeführten Grundvorstellungen das breite Spektrum der mentalen Modelle der Brüche auf.

### 2.2.1.1 Grundvorstellungen zum Zugang der Bruchzahlen

Diese Grundvorstellung basiert auf einer anschaulichen Vorstellung (Noll, 2020, S. 25). Für Padberg & Wartha (2017, S. 24) ist der Einstieg in die Bruchrechnung über das Betrachten von Kreisen empfehlenswert, da Kreise das Ganze besonders prägnant darstellen. Noll (2020, S. 25) schlägt beispielsweise vor, den Bruch  $\frac{3}{4}$  folgendermaßen zu interpretieren: „Ein Ganzes wird in vier gleich große Teile geteilt und drei dieser Teile werden betrachtet“ (vgl. Abb. 2.2). Dabei beschreibt der Nenner, in wie viele *gleich* große Teile das Ganze geteilt wird und der Zähler gibt an, wie viele dieser Teile betrachtet werden sollen (Noll, 2020, S. 25–26). Im Rückschluss ergibt sich das Ganze aus der Vereinigung der betrachteten Teile (in Abb. 2.2 in roter Farbe) beziehungsweise der nicht betrachteten Teile (in Abb. 2.2 in grau eingefärbt) (Noll, 2020, S. 26). Bei der Grundvorstellung *Bruchzahl als Teil eines Ganzen* liegt der Fokus darauf, in wie viele Teile das Ganze aufgeteilt wird und ob diese Teilstücke alle gleich groß sind, auch wenn sie in ihrer Form variieren können (Padberg & Wartha, 2017, S. 26). Laut Malle (2004) kann die Grundvorstellung mittels  $\frac{a}{b}$  von 1 (oder einem Ganzen) allgemeiner formuliert werden. Dabei kann das Ganze ein Objekt (Pizza, Torte etc.) oder eine Größe (ein Kilogramm, ein Meter etc.) sein (Malle, 2004). Padberg & Wartha (2017, S. 21) beschreiben, dass ein Bruch als Anteil eines Ganzen kontinuierlich oder diskret sein kann. Ein Ganzes und dessen Teile ist kontinuierlich, wenn sie zusammenhängend sind und sich selbst in weitere kleinere und zusammenhängende Einheiten unterteilen lassen (Schink & Meyer,

Bruchzahl als Teil eines Ganzen

2013). Schink & Meyer (2013) nennen als Beispiele einen Liter Wasser in einem Messbecher oder ein nicht geschnittener Kuchen. Falls mehrere einzelne Objekte vorhanden sind, welche man zu einer Gruppe oder Menge zusammenfasst, nennt man das Ganze diskret (Schink & Meyer, 2013). Ein Beispiel könnte nach Schink & Meyer (2013) eine Menge an Zuckerln sein.

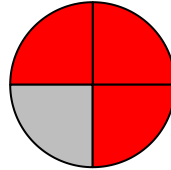


Abbildung 2.2: Bruchzahl als Teil eines Ganzen [adaptiert von Malle (2004)]

Das Beispiel „ $\frac{3}{4}$  von 12 Murmeln“, welches ein diskretes Ganzes fokussiert, kann unter Zuhilfenahme der Abb. 2.3 betrachtet werden. Die Menge an Murmeln wird in vier Teilmengen aufgeteilt. Wobei darauf geachtet werden muss, dass diese Teilmengen gleich groß sind. In diesem Beispiel besteht jede Teilmenge aus drei Murmeln. Da der Bruch  $\frac{3}{4}$  betrachtet werden soll, werden nur drei der vier Teilmengen (in Abb. 2.3 rot dargestellt) beachtet. Der gesuchte Anteil entspricht dabei neun Murmeln.

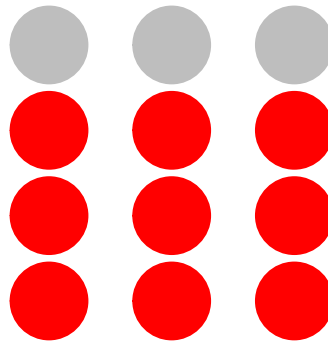


Abbildung 2.3: Bruchzahl als Teil eines diskreten Ganzen [adaptiert von Malle (2004)]

Diese Grundvorstellung der *Bruchzahl als Anteil eines Ganzen* ermöglicht es, Brüche ikonisch mittels Rechtecken, Kreisen und Strecken sowie enaktiv durch Falten von rechteckigem Papier darzustellen (Padberg & Wartha, 2017, S. 28).

Bruchzahl als Teil mehrerer Ganzen

Ein weiterer Aspekt des *Bruchs als Anteil* ist nach Padberg & Wartha (2017, S. 28) die Grundvorstellung des *Bruchs als Anteil mehrerer Ganzen*. Malle (2004) fasst diesen Aspekt unter *Bruchzahl als relativer Anteil* zusammen. Das Ganze wird durch mehrere Objekte gebildet (Noll, 2020, S. 26; Padberg & Wartha, 2017, S. 28). Im Sinne von Schink & Meyer (2013) kann das Ganze als diskret betrachtet werden. Malle (2004) drückt diese Grundvorstellung allgemein durch

$$\frac{a}{b} \text{ von } c$$

aus. Dementsprechend ist die Betrachtung von 1 als Ganzem ein Spezialfall der allgemeinen Betrachtung (Noll, 2020, S. 27). Padberg & Wartha (2017, S. 29) führen unter anderem folgendes Beispiel an: Wie können drei Stück Kuchen gerecht auf vier Freunde verteilt werden? Dabei wird ersichtlich, dass die Aufteilung der Kuchen unterschiedlich erfolgen kann, aber schlussendlich jeder ein dreiviertel Stück Kuchen erhält. Exemplarisch sind zwei Vorgehensweisen von Padberg & Wartha (2017, S. 29) angeführt:

- „Jeder bekommt von jedem der drei Stücke jeweils ein Viertel, also jeder insgesamt drei Viertel Stück Kuchen.“ (vgl. Abb. 2.4 oben)
- „Zunächst werden zwei Stücke Kuchen gerecht verteilt, jeder bekommt also ein halbes Stück. Anschließend wird das dritte Stück gerecht verteilt. Jeder bekommt ein Viertel, also jeder insgesamt drei Viertel Stück Kuchen.“ (vgl. Abb. 2.4 unten)

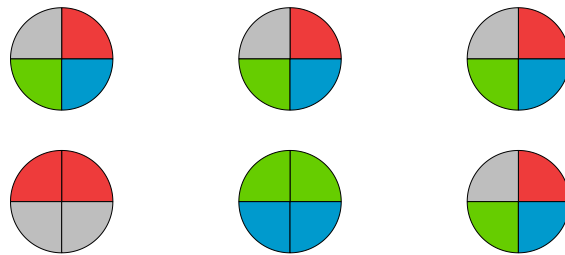


Abbildung 2.4: Bruchzahl als Teil mehrerer Ganzer

An diesem einfachen Beispiel ist ersichtlich, dass das Aufteilen auf unterschiedliche Arten erfolgen kann, das Endergebnis beziehungsweise der Anteil aber nicht variiert. Padberg & Wartha (2017, S. 30) geben zu bedenken, dass sich nicht alle Dinge gerecht aufteilen lassen, wie beispielsweise die Aufgabe zwei Luftballons unter drei Kindern gerecht zu verteilen.

Eine weitere Grundvorstellung basiert darauf, dass Brüche dazu verwendet werden, Objekte bezüglich ihrer Anzahl, ihrer Größe oder ihres Gewichts zu vergleichen (Noll, 2020, S. 27). Dementsprechend kann diese Grundvorstellung mittels „ $\frac{a}{b}$  mal so viel wie  $c$ “, „ $\frac{a}{b}$  mal so groß wie  $c$ “ oder „ $\frac{a}{b}$  mal so schwer wie  $c$ “, ausgedrückt werden (Malle, 2004). Die Grundvorstellung *Bruch als Vergleichsoperator* wird in Abb. 2.5 visualisiert. Dabei enthält die Menge  $A$   $\frac{3}{4}$  mal so viele Kreise wie die Menge  $B$  (Beispiel von Malle (2004)).

Bruchzahl als Vergleichsoperator

Die Vorstellung von Brüchen erfordert laut Noll (2020, S. 28) die Fähigkeit, die Bezugsgröße flexibel zu wählen. Bezogen auf das Beispiel aus 2.5 ist die Bezugsgröße die Menge  $B$ . Diese Grundvorstellung ermöglicht weiters, dass eine natürliche Beziehung zwischen „von“ und „mal“ gebildet werden kann (Noll, 2020, S. 28).

In den natürlichen Zahlen wird die Division unter anderem über das gerechte Verteilen eingeführt (Padberg & Wartha, 2017, S. 30). Mittels Bruchzahlen werden in  $\mathbb{N}$  oder  $\mathbb{Z}$  unlösbare Aufgaben gelöst (Padberg & Wartha, 2017, S. 30). Das Beispiel der drei Kuchen und vier Freunde lässt sich als Division  $3 : 4$  anschreiben mit dem Ergebnis  $\frac{3}{4}$ . Malle (2004) formuliert die Grundvorstellung der *Bruchzahl als Resultat einer Division* allgemein mit „ $\frac{a}{b} = a : b$ “. Hier ist offensichtlich, dass der Bruchstrich äquivalent zum Divisionszeichen ist. Beispielhaft für diese Grundvorstellung ist die

Bruchzahl als Resultat einer Division

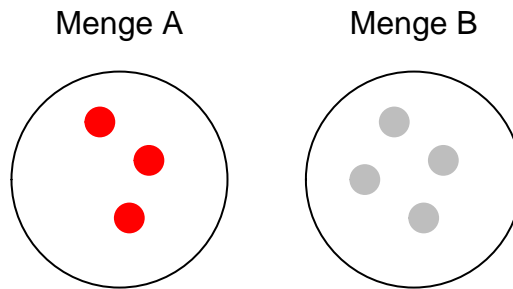


Abbildung 2.5: Bruchzahl als Vergleichsoperator [adaptiert von Malle (2004)]

Aufgabe des Aufteilens von drei Pizzen auf vier Personen, sprich  $3 : 4 = \frac{3}{4}$  (Malle, 2004). Die Grundvorstellung beschreibt den Anteil, den eine Person vom Ganzen im Laufe des Verteilungsprozesses mehrerer Ganzen (in diesem Falle einem diskreten Ganzen) erhalten muss (Noll, 2020, S. 28). Dieses Vorgehen kann auf einfache Weise visualisiert werden, wie beispielsweise in Abb. 2.6.

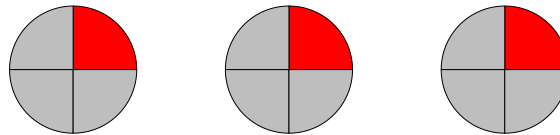


Abbildung 2.6: Bruchzahl als Resultat einer Division [adaptiert von Malle (2004)]

Padberg & Wartha (2017, S. 30) haben die Grundvorstellung des *Bruchs als Resultat einer Division* unter die Grundvorstellung *Bruchzahl als Anteil mehrerer Ganzen* subsumiert. Reiss & Schmieder (2014, S. 262) merken kritisch an, dass eine Bruchzahl beziehungsweise rationale Zahl nicht als Ergebnis einer Division eingeführt werden kann, da eine Division in den natürlichen oder ganzen Zahlen noch nicht definiert wurde. Jedoch gibt Wittmann (2006) an, dass diese Grundvorstellung ein Bindeglied zwischen gemeinen Brüchen und Dezimalbrüchen sein kann.

Bruchzahl als Verhältnis

Auch die Grundvorstellung der *Bruchzahl als Verhältnis* kann nach Malle (2004) allgemein durch „ $\frac{a}{b} = a : b$ “ ausgedrückt werden. Der Doppelpunkt ist im Gegensatz zur Vorstellung der *Bruchzahl als Resultat einer Division* nicht das Divisionszeichen, sondern sollte als Verhältniszeichen aufgefasst werden (Noll, 2020, S. 29). Malle (2004, S. 5) gibt für diese Grundvorstellung das Beispiel „Die Länge zweier Landebahnen verhalten sich wie 3 : 4.“ an (vgl. Abb. 2.7).

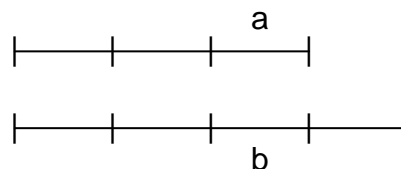


Abbildung 2.7: Bruchzahl als Verhältnis [adaptiert von Malle (2004)]

Aus Abb. 2.7 folgt, dass die Länge der Landebahn  $a$   $\frac{3}{7}$  der Gesamtstrecke beträgt (Noll, 2020, S. 29). Wobei sich die Gesamtstrecke aus der Länge der Landebahn  $a$  und der Länge der Landebahn

$b$  zusammensetzt. Demzufolge entspricht die Landebahn  $b$  auch  $\frac{4}{7}$  der Gesamtstrecke. Padberg & Wartha (2017, S. 20) führen das Mischverhältnis der Farben Rot und Blau (2 : 3) als Beispiel an. Aus ihrem Beispiel folgt, dass  $\frac{2}{5}$  der Mischung blau und  $\frac{3}{5}$  der Mischung rot sind. Die beiden Beispiele zeigen, „wie Verhältnisangaben bei inneren Teilverhältnissen inhaltlich gleichwertig in Bruchangaben umgewandelt werden können“ (Padberg & Wartha, 2017, S. 20). Die Grundvorstellung *Bruchzahl als Verhältnis* kann als Bindeglied zum Inhaltsbereich der Proportionalität gesehen werden (Wartha, 2009; Wartha & Güse, 2009). Für vom Hofe & Blum (2016) gehört die Vorstellung eines Bruches als Verhältnis neben den Vorstellungen als Anteil und den Vorstellungen als Operator zu den wichtigsten Grundvorstellungen. Während Malle (2004) von *Brüchen als Verhältnissen* spricht, verweisen Padberg & Wartha (2017, S. 20) auf *Brüche und Verhältnisse*. Streit & Barzel (2013, S. 9) formulieren diese Problematik folgendermaßen: „So beschreibt  $\frac{1}{2}$  in der Vorstellung ‘Bruchzahl als Verhältnis’ das Verhältnis ‘1 von 2’ und gerade nicht das Verhältnis ‘1 zu 2’.“ In Abb. 2.8 ist die Schwierigkeit der grafischen Darstellung von Bruchzahlen als Verhältnis für die Problemstellung 2 : 3 dargestellt.

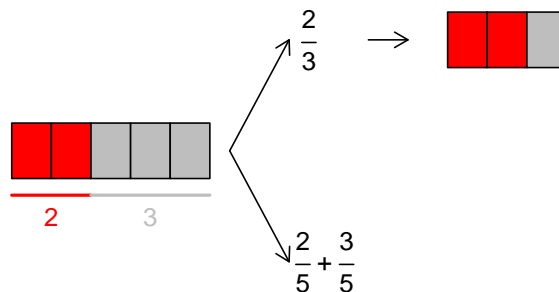


Abbildung 2.8: Bruchzahl als Verhältnis und Bruchzahl und Verhältnis

Während die linke Darstellung in Abb. 2.8 beispielsweise das Mischungsverhältnisses von 2 zu 3 eines Saftes darstellt, ist eine Verbindung zum Bruch  $\frac{2}{3}$  und dessen übliche Visualisierung (rechte Darstellung) schwer vereinbar. Üblicherweise wird die linke Darstellung mit  $\frac{2}{5} + \frac{3}{5}$  in Verbindung gebracht. Streit & Barzel (2013) schlagen deshalb vor, dass die Schüler\*innen den Teilungsaspekt (*Bruch als Anteil*) und den Verhältnisaspekt von Brüchen zuerst getrennt voneinander erlernen und erst in weiteren Schritten zusammenführen. Eine explizite Aufarbeitung von *Brüchen und Verhältnissen* und *Brüche als Verhältnisse* ist ausständig und Autor\*innen, wie beispielsweise Barzel (2012), referenzieren auf beide *Schreibweisen*. In dieser Arbeit wird Abstand davon genommen, die gegebene Erklärung des Verhältnisaspekts vollständig und korrekt darzulegen, vielmehr soll auf die Schwierigkeit dieses Aspekts hingewiesen werden.

Bei den natürlichen Zahlen bezieht sich der Kardinalzahlaspekt auf die Mächtigkeit von Mengen, das heißt auf die Anzahl der Elemente der Menge (Noll, 2020, S. 29). Diese Vorstellung ist die Basis für die Grundvorstellung *Bruchzahl als Quasikardinalzahl*. In dieser Grundvorstellung werden Brüche als Größen mit der Maßzahl  $a$  und der Größeneinheit  $\frac{1}{b}$  aufgefasst (Padberg & Wartha, 2017, S. 21). Beispielsweise wird beim Bruch  $\frac{3}{4}$  der Nenner als Größeneinheit interpretiert, das bedeutet dass in diesem Fall *Viertel* eine Einheit darstellt (Noll, 2020, S. 29). Der Zähler beschreibt die Anzahl der Elemente, in unserem Fall 3 Viertel. Da das Vorgehen bei den Brüchen auf der Analogie des Zählers als Kardinalzahl basiert, spricht man hier von *quasikardinal* (Noll, 2020, S. 29; Padberg & Wartha, 2017, S. 21). Die Addition und Subtraktion von gleichnamigen Brüchen kann

Bruchzahl als Quasi-  
kardinalzahl

laut Malle (2004) durch diese Grundvorstellung auf das Rechnen in  $\mathbb{Z}$  zurückgeführt werden:

$$3 \text{ Birnen} + 2 \text{ Birnen} = 5 \text{ Birnen}$$

$$3 \text{ Viertel} + 2 \text{ Viertel} = 5 \text{ Viertel}$$

Ein weiterer positiver Aspekt dieser Grundvorstellung ist, dass der Größenvergleich gleichnamiger Brüche Anschluss an die Ordnung der natürlichen Zahlen bietet (Noll, 2020, S. 30).

Bruchzahl als Quasiordinalzahl

Die Grundvorstellung der *Bruchzahl als Quasiordinalzahl* ist auf Stammbrüche beschränkt (Malle, 2004; Noll, 2020, S. 30). Diese Vorstellung ist stark mit dem Sinn des Ordinalzahlaspekts der natürlichen Zahlen verwoben (Noll, 2020, S. 30). Durch den Ordinalzahlaspekt können natürliche Zahlen als Zählnzahl (zum Beispiel: eins, zwei, drei . . . zwanzig Schüler\*innen) oder als Ordnungszahl (zum Beispiel: Anna wurde beim Skirennen dritte) interpretiert werden (Noll, 2020, S. 30). Laut Malle (2004) lässt sich der Bruch  $\frac{1}{4}$  nach der Grundvorstellung *Bruchzahl als Quasiordinalzahl* als „jeder Vierte“ interpretieren. Diese Grundvorstellung kann noch in die Kategorien *strikt oder wörtlich* und *statistisch* eingeteilt werden (Malle, 2004; Noll, 2020, S. 30). Dieser Aspekt kann nach Malle (2004, S. 5) am Beispiel „jede vierte Perle ist rot“ verdeutlicht werden. Betrachtet man diesen Satz im *strikten oder wörtlichen* Sinn bedeutet das, dass jede vierte Perle in einer Perlenkette rot gefärbt ist. Daraus folgt, dass drei grauen Perlen stets eine rote Perle folgt (Abb. 2.9).



Abbildung 2.9: Bruchzahl als Quasiordinalzahl (striktter Sinn) [adaptiert von Malle (2004)]

Die Grundvorstellung kann im *statistischen* Sinn als „ein Viertel aller Perlen ist rot“ (Malle, 2004, S. 5) interpretiert werden. Dieser Sachverhalt wird in Abb. 2.10 visualisiert.



Abbildung 2.10: Bruchzahl als Quasiordinalzahl (statistischer Sinn) [adaptiert von Malle (2004)]

Noll (2020, S. 30) und Malle (2004) geben an, dass durch diese Grundvorstellung der Größenvergleich von Stammbrüchen möglich ist. Denn die Grundvorstellung *Bruchzahl als Quasiordinalzahl* macht deutlich, dass der Anteil an roten Perlen größer ist, wenn jede vierte Perle rot gefärbt ist, als wenn lediglich jede neunte Perle rot wäre. Diese Vorstellung geht in die Stammbrüche und den Größenvergleich

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{9}$$

über (Noll, 2020, S. 30).

Bruchzahl als Maßzahl

Da nach Padberg & Wartha (2017, S. 20) Bruchzahlen in Sachsituationen in Kombination mit Maßeinheiten auftreten, bezeichnen die Brüche Größen. Diese Vorstellung ist die Basis der Grundvorstellung der *Bruchzahl als Maßzahl*. Im Gegensatz zur Perspektive der *Bruchzahl als Anteil*

beziehen sich die Brüche zwingend auf Größen, da die Bruchzahlen mit Maßeinheiten versehen sind (Schlögl, 2018, S. 35). Zum Beispiel fallen  $\frac{1}{2}$  Kilogramm (kg) oder  $\frac{3}{4}$  Meter (m) unter diese Grundvorstellung. Brüche können auch eine genauere Bezeichnung einer Stelle auf einer Skala sein und weisen eine starke Verwandtschaft mit der Grundvorstellung der *Bruchzahl als Maßzahl* auf (Padberg & Wartha, 2017, S. 21).

Laut Malle (2004) könnte der Bruch  $\frac{3}{4}$  im Sinne der Grundvorstellung *Bruchzahl als absoluter Anteil* als 3 von 4 interpretiert werden. In der Praxis findet diese Grundvorstellung zwar häufig Verwendung, ist aber laut Malle (2004) und Noll (2020, S. 30) nur anwendbar, wenn mit den Bruchzahlen keine Berechnungen angestellt werden. Noll (2020, S. 30) gibt hier die Problematik an, dass ansonsten die fehlerhafte Addition von Brüchen

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{5}{7}$$

gerechtfertigt werden könnte. Auch Malle (2004) referenziert auf diesen Problemfall und visualisiert dies wie in Abb. 2.11.

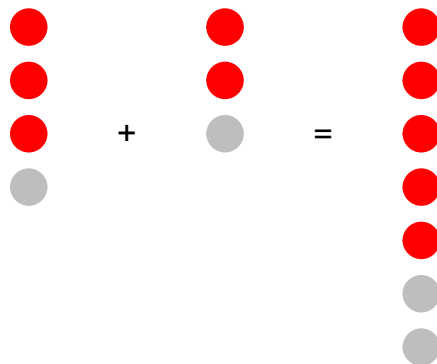


Abbildung 2.11: Problematik bei der Addition zweier Brüche durch die Grundvorstellung des Bruchs als absoluten Anteil (statistischer Sinn) [adaptiert von Malle (2004)]

Die Grundvorstellung der *Bruchzahl als Anteil* besitzt eine Relation zwischen der Gesamtbezugsgröße und der Anteilsbezugsgröße (Schlögl, 2018, S. 37). Die visualisierte Problematik in Abb. 2.11 tritt unter anderem bei Verhältnissen auf, wie beispielsweise den *Torverhältnissen* von erster und zweiter Halbzeit, da diese in absoluten Größen gezählt werden (Streit & Barzel, 2013).

### 2.2.1.2 Grundvorstellungen zum Erweitern und Kürzen

Das Erweitern und Kürzen von Brüchen setzt voraus, dass die Lernenden über einen fundierten Äquivalenzbegriff verfügen beziehungsweise die Gleichwertigkeit von Brüchen erfassen (Padberg & Wartha, 2017, S. 42). Anschaulich kann dies durch Falten von Papierblättern (vgl. Abb. 2.12) visualisiert werden (Padberg & Wartha, 2017, S. 42).

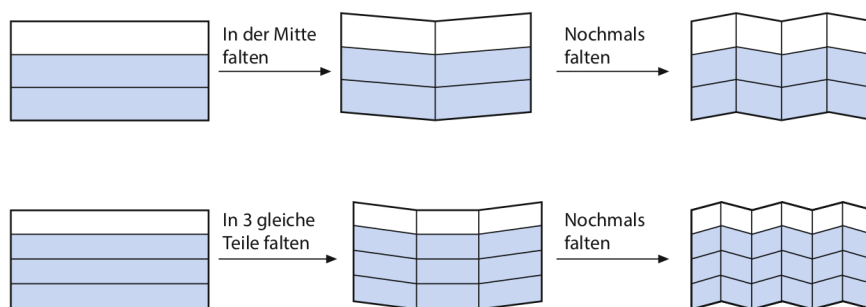


Abbildung 2.12: Falten eines Papierbogens [entnommen aus Padberg und Wartha (2017, S. 42)]

Durch das Falten ändert sich offensichtlich nicht der *Anteil* der blau gefärbten Fläche des Papierbogens, jedoch wird die Anzahl der Unterteilungen geändert (Padberg & Wartha, 2017, S. 43). Basierend auf dem unveränderten Anteil werden die Brüche als gleichwertig betrachtet (Padberg & Wartha, 2017, S. 43). Alternativ geben die beiden Autoren noch an, dass über das gerechte Verteilen von Pizzas ein Zugang zur Gleichwertigkeit von Brüchen geschaffen werden kann.

Erweitern als Verfeinern

Durch das Falten der Papierblätter in Abb. 2.12 wird die Unterteilung *verfeinert* (Padberg & Wartha, 2017, S. 42). Rechnerisch entspricht die Verfeinerung beim Bruch der Multiplikation des Zählers und des Nenners mit derselben Zahl (Padberg & Wartha, 2017, S. 47). Daraus folgt laut Padberg & Wartha (2017, S. 47), dass *Erweitern* die Multiplikation des Zählers und Nenners eines Bruches mit einer natürlichen von 0 und 1 verschiedenen Zahl ist. Damit entsteht die Analogie des *Erweiterns* mit dem *Verfeinern*.

Kürzen als Vergrößern

Auch das Kürzen eines Bruches kann durch Falten eines Papierbogens visualisiert werden. Wenn das Falten aus Abb. 2.12 rückgängig gemacht wird und dadurch die Bilder von rechts nach links betrachtet werden, erhält man eine *Vergrößerung* (Padberg & Wartha, 2017, S. 42). Die Autoren merken an, dass die Vergrößerung im Gegensatz zur Verfeinerung nur in begrenztem Umfang realisierbar ist. Rechnerisch entspricht dem Vergrößern beim Bruch die Division des Zählers und Nenners durch dieselbe Zahl  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \neq 0$  oder  $n \neq 1$  (Padberg & Wartha, 2017, S. 49). Dieses Vorgehen nennt man Kürzen, wobei auch hier die Analogie des *Vergrößerns* und des *Kürzens* offensichtlich ist. Im Unterschied zum Erweitern kann der Bruch nur durch *gemeinsame* Teiler von Zähler und Nenner gekürzt werden (Padberg & Wartha, 2017, S. 49).

### 2.2.1.3 Grundvorstellungen zu Addition und Subtraktion

Addieren als Hinzufügen, Subtrahieren als Wegnehmen

Der Grundgedanke des Zusammenschiebens oder Hinzufügens bei der Addition der Bruchzahlen entspricht dem Zusammenlegen der Addition der natürlichen Zahlen im Sinne des Kardinalzahlmodells (Padberg & Wartha, 2017, S. 74). In diesem Fall bleibt die Grundvorstellung der Addition unverändert leicht verständlich (Padberg & Wartha, 2017, S. 74–75). Jedoch geben Padberg & Wartha (2017, S. 75) an, dass ohne eine gemeinsame Unterteilung der Brüche (gleicher Nenner) das Ergebnis nicht einfach abgelesen werden kann. Daraus folgern sie, dass die Problematik der Addition nicht in der konzeptuellen und unveränderten Seite liegt, sondern mehr auf der prozeduralen



Seite der Addition mit Brüchen. Im Gegensatz zur Addition wird bei der Subtraktion die Grundvorstellung des Wegnehmens herangezogen (Padberg & Wartha, 2017, S. 76). Die angesprochenen Schwierigkeiten auf der prozeduralen Seite der Addition gelten auch für die Subtraktion. Wieder merken die Autoren an, dass eine gemeinsame Unterteilung der Brüche mittels gleichem Nenner essenziell für die beiden Rechenoperationen ist. Weiters ist hier der quasikardinale Aspekt hilfreich, da die Analogie der natürlichen Zahlen und Bruchzahlen stark betont wird (Malle, 2004; Padberg & Wartha, 2017, S. 76).

Analog zum Rechnen mit den natürlichen oder ganzen Zahlen kann nach Malle (2004) auch ein Zahlenstrahl für die Bruchrechnung herangezogen werden. Durch den Zahlenstrahl (vgl. Abb. 2.13) wird die Grundvorstellung des *Addierens als Vorwärtsschreiten* und *Subtrahierens als Rückwärtsschreiten* besonders deutlich (Malle, 2004).

Addieren als Vorwärtsschreiten, Subtrahieren als Rückwärtsschreiten

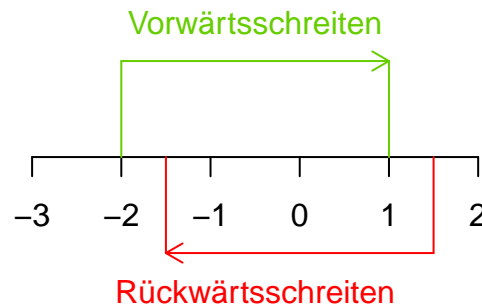


Abbildung 2.13: Vorwärts- und Rückwärtsschreiten als Rechenoperationen [adaptiert von Malle (2004)]

Beim Rechnen mit natürlichen Zahlen werden Vielfache der Basiseinheit 1 zum Vorwärts- oder Rückwärtsschreiten verwendet. Beim Rechnen mit Bruchzahlen muss diese „Einheit“ kleiner unterteilt sein und die Bruchzahlen sollten wiederum dieselben Unterteilungen aufweisen. Die Addition und Subtraktion von gleichnamigen Brüchen könnte mit dem Zahlenstrahl visualisiert werden. Eine weiterführende Tragfähigkeit dieser Grundvorstellung wird jedoch in Frage gestellt.

#### 2.2.1.4 Grundvorstellung zu Multiplikation und Division

Die Grundvorstellung der *Multiplikation als abgekürzte Addition* kann von den natürlichen Zahlen auf die Multiplikation einer natürlichen Zahl mit einem Bruch übertragen werden (Padberg & Wartha, 2017, S. 105). Beispielsweise kann die Aufgabe  $3 \cdot \frac{2}{7}$  rechnerisch betrachtet werden, als

Multiplikation als abgekürzte Addition

$$3 \cdot \frac{2}{7} = \frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$$

oder graphisch über Rechtecke oder Kreise, wie in Abb. 2.14 (Padberg & Wartha, 2017, S. 105).

Dadurch ist die Grundvorstellung der *Multiplikation als wiederholte Addition* für das Vervielfachen von Brüchen weiterhin brauchbar (Padberg & Wartha, 2017, S. 106). Die Autoren geben weiters an,

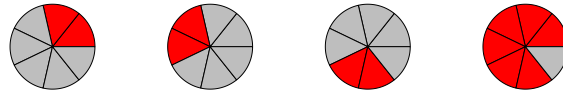


Abbildung 2.14: Wiederholte Addition [adaptiert von Padberg und Wartha (2017, S. 105)]

dass die Multiplikation auf die Addition *gleichnamiger* Brüche zurückgeführt wird. Dadurch wird der Zähler addiert, der Nenner bleibt jedoch unverändert.

Von-Deutung der Multiplikation

Das Beispiel  $\frac{2}{7} \cdot 3$  kann nicht mittels der wiederholten Addition berechnet werden, da man 3 nicht  $\frac{2}{7}$ -mal addieren kann (Padberg & Wartha, 2017, S. 106). In diesem Fall ist die Grundvorstellung des *Operatorkonzepts* und dadurch der *Von-Ansatz* hilfreich, um diesen Sonderfall zu verstehen (Padberg & Wartha, 2017, S. 106). Dabei wird  $\frac{2}{7} \cdot 3$  als  $\frac{2}{7}$  von 3 definiert. Wenn der Nenner die natürliche Zahl teilt, lassen sich diese Multiplikationen einfach lösen (Padberg & Wartha, 2017, S. 106). Im Beispiel gilt dies aber nicht, jedoch weist Abb. 2.15 laut Padberg & Wartha (2017, S. 106) bereits eine grafische Möglichkeit zur Lösung.

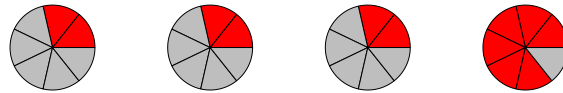


Abbildung 2.15: Von-Deutung [adaptiert von Padberg und Wartha (2017, S. 105)]

Zunächst wird die Grundvorstellung *Bruch als Anteil mehrerer Ganzer* herangezogen, indem die drei Kreise als „neues“ Ganzes betrachtet werden. Von diesem neuen Ganzen können  $\frac{2}{7}$  gebildet werden, indem von jedem einzelnen Ganzen  $\frac{2}{7}$  gebildet werden. Wie Padberg & Wartha (2017, S. 106) beschreiben, erhält man damit  $\frac{2}{7} \cdot 3 = \frac{6}{7}$ , indem der Zähler mit der natürlichen Zahl multipliziert wird. Die beiden Ansätze zur Multiplikation eines Bruchs mit einer natürlichen Zahl zeigen, dass sowohl das Vervielfachen als auch der Operatoransatz zum selben Ergebnis führt (Padberg & Wartha, 2017, S. 106). Aufgrund des Kommutativitätsgesetzes in  $\mathbb{N}$  folgern Padberg & Wartha (2017, S. 107) die Kommutativität für diese Sonderfälle der Multiplikation von Brüchen.

Multiplikation über Anteil von Anteil

Nun sind die Grundvorstellungen für Aufgaben der Art  $n \cdot \frac{a}{b}$  und  $\frac{a}{b} \cdot n$  mit  $a, b, n \in \mathbb{N}$  bekannt. In den nächsten beiden Absätzen werden daher zwei Grundvorstellungen zur Multiplikation zweier Brüche beschrieben. Die erste Grundvorstellung basiert auf dem Ansatz des Anteils vom Anteil (Padberg & Wartha, 2017, S. 109). Dabei wird die Multiplikation  $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$  im Sinne des *Von-Ansatz* als  $\frac{2}{3}$  von  $\frac{4}{5}$  gedeutet. Im Folgenden wird das weitere Vorgehen von Padberg & Wartha (2017, S. 109) beschrieben (vgl. Abb. 2.16).

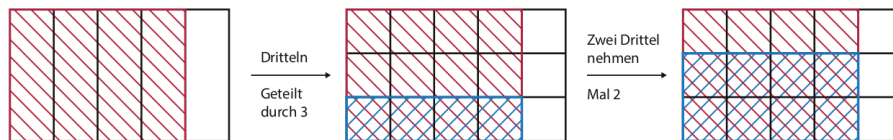


Abbildung 2.16: Anteil vom Anteil [entnommen aus Padberg und Wartha (2017, S. 109)]

Zuerst wird von einem Ganzen (visualisiert als Rechteck) der Anteil von  $\frac{4}{5}$  bestimmt. Um dies zu

erreichen, wird das Ganze in fünf gleich große Teilstücke unterteilt. Von diesen fünf Teilstücken werden vier betrachtet (rot schraffiert in Abb. 2.16, da  $\frac{4}{5}$  gesucht sind). Die Grundvorstellung, welche für diesen Schritt aktiviert werden sollte, ist *Anteil eines Ganzen*. Im nächsten Schritt wird die Perspektive verschoben und das rot schraffierte Teilstück der  $\frac{4}{5}$  als neues Ganzes betrachtet. Von diesem neuen Ganzen soll nun der Anteil von  $\frac{2}{3}$  bestimmt werden. Wiederum wird das Ganze in Teilstücke unterteilt, in diesem Fall in drei. Einer dieser neuen Teilstücke stellt nun  $\frac{1}{3}$  von  $\frac{4}{5}$  dar. Da  $\frac{2}{3}$  betrachtet werden sollen, werden im letzten Schritt zwei Teilstücke schraffiert (in Abb. 2.16 blau schraffiert). In graphischer Ebene ist die Aufgabe  $\frac{2}{3}$  von  $\frac{4}{5}$  durch den doppelt schraffierten Bereich gelöst. Rechnerisch betrachtet rückt das ursprüngliche Rechteck wieder als Ganzes in den Blick. Das ursprüngliche Rechteck wurde zuerst in 5 gleich große Teile und danach in 3 gleich große Teile zerlegt. Insgesamt besteht das Rechteck nun aus  $3 \cdot 5 = 15$  flächeninhaltsgleichen Teilstücken, welche das Produkt der Nenner darstellen. Durch Nachzählen kann man sich leicht von diesem Ergebnis überzeugen. Ein solches flächeninhaltsgleiches Teilstück entspricht somit  $\frac{1}{15} = \frac{1}{3 \cdot 5}$  des Ganzen. Bei der Lösung der Aufgabe  $\frac{2}{3}$  von  $\frac{4}{5}$  werden zuerst 2 Teilrechtecke in der einen Richtung (waagrecht) und danach 4 Teilrechtecke in der anderen Richtung (senkrecht) betrachtet, somit  $2 \cdot 4$  (Produkt der Zähler). Das Produkt  $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$  definiert durch  $\frac{2}{3}$  von  $\frac{4}{5}$  ist  $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$  (Padberg & Wartha, 2017, S. 109).

Die zweite mögliche Grundvorstellung nach Padberg & Wartha (2017, S. 110) ist die Betrachtung der Multiplikation zweier Brüche über die Flächeninhaltsformel  $A = (a \cdot b)^2 \text{ dm}^2$  für Rechtecke, wobei  $a, b \in \mathbb{N}$ . Weiters geben sie an, dass Brüche unter dieser Betrachtung Maßzahlen sind. Wiederum wird anhand der Beschreibung von Padberg & Wartha (2017, S. 110) das Verfahren zur Berechnung der Multiplikation  $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$  beschrieben (vgl. 2.17).

Multiplikation über  
Flächeninhalt

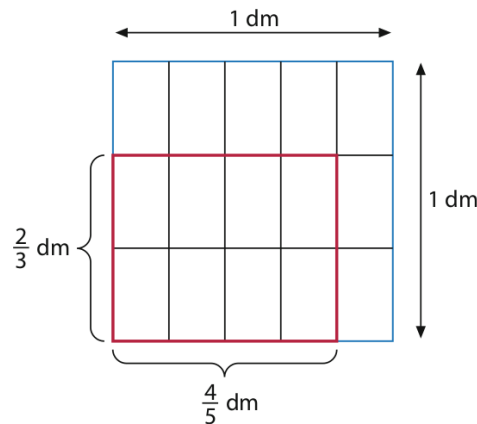


Abbildung 2.17: Multiplikation über Flächeninhalt [entnommen aus Padberg und Wartha (2017, S. 111)]

Das Einheitsquadrat mit Seitenlänge 1 dm wird in  $3 \cdot 5 = 15$  flächeninhaltsgleiche Rechtecke unterteilt. Dies entspricht wiederum dem Produkt der Nenner. Ein Teilrechteck hat den Flächeninhalt  $\frac{1}{15} \text{ dm}^2$ . Die Aufgabe gibt vor, dass  $2 \cdot 4 = 8$  Rechtecke (Produkt der Zähler) betrachtet werden (vgl. Abb. 2.17), dadurch gilt

$$A = \frac{8}{15} dm^2 = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} dm^2$$

Wenn auch die Gültigkeit der Flächeninhaltsformel für Rechtecke mit Brüchen als Maßzahlen vertraut werden kann, wie das Permanenzprinzip vorgibt, dann gilt

$$A = \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \right) dm^2$$

Insgesamt gilt dann  $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}$ . Padberg & Wartha (2017, S. 112) geben noch an, dass die Grundvorstellung *Anteil vom Anteil* und *Flächeninhalt* eng miteinander verwoben sind. Dies ist beispielsweise an der grafischen Visualisierung der beiden Ansätze ersichtlich, da diese weitgehend übereinstimmen.

**Dividieren als Verteilen** Auch bei der Division kann zuerst der Bruch durch eine natürliche Zahl betrachtet werden, da sich diese gut einführen lässt (Padberg & Wartha, 2017, S. 133). Besonders einfach bezeichnen die beiden Autoren die Einführung der Division, wenn der Divisor den Zähler des Bruches teilt. Hier kann einfach mithilfe von Rechtecken, Kreisen oder Strecken operiert werden. Die aktivierte Grundvorstellung ist das *Dividieren als Verteilen* (Padberg & Wartha, 2017, S. 133). Diese Vorstellung erlaubt nach Padberg & Wartha (2017, S. 133) auch eine direkte Einsicht: „*Dividiere den Zähler durch den Divisor und behalte den Nenner bei.*“ An dieser Stelle ist der quasikardinale Aspekt äußerst hilfreich (Padberg & Wartha, 2017, S. 133). Auch im Fall, dass der Divisor den Zähler nicht teilt, kann die Grundvorstellung des Verteilens angewandt werden (Padberg & Wartha, 2017, S. 133). Wie beispielsweise bei der Aufgabe  $\frac{5}{9} : 2$

$$\frac{5}{9} : 2 = \frac{5 \cdot 2}{9 \cdot 2} : 2 = \frac{(5 \cdot 2) : 2}{9 \cdot 2} = \frac{5}{9 \cdot 2} = \frac{5}{18} \quad (2.6)$$

(Padberg & Wartha, 2017, S. 133). Die Idee, die Padberg & Wartha (2017, S. 133) verwenden, ist die Verfeinerung der Unterteilung, sodass der Zähler wiederum problemlos durch den Divisor teilbar ist. Im Beispiel (2.6) wurde  $\frac{5}{9}$  mit 2 erweitert. Dadurch erhält man den Einblick, dass ein Bruch durch eine natürliche Zahl dividiert wird, indem der Nenner mit der natürlichen Zahl multipliziert wird (Padberg & Wartha, 2017, S. 133).

**Dividieren als Messen** Padberg & Wartha (2017, S. 133) schlagen unter anderem die eigenständige Einführung der Division von Brüchen als *Messen* vor. Dabei kann das bereits bekannte Konzept und Vorgehen aus den natürlichen Zahlen auf die rationalen Zahlen ausgedehnt werden. Nach Malle (2004) basiert die Grundvorstellung auf der Frage, wie oft ein bestimmtes Maß in einer vorgegebenen Größe enthalten ist. Dabei merkt er an, dass die Aufgabenstellung nur sinnvoll ist, wenn der Dividend größer oder gleich dem Divisor und der Quotient eine natürliche Zahl ist. Eine prototypische Aufgabe nach Malle (2004) wäre: „ $\frac{3}{4}$  Liter Cola soll in  $\frac{1}{4}$  Liter Dosen verpackt werden. Wie viele Dosen können damit gefüllt werden?“

Anhand Abb. 2.18 lässt sich folgern, dass  $\frac{3}{4}l : \frac{1}{4}l = 3$  ist. Alternativ kann laut Malle (2004) die Division als fortlaufende Subtraktion (analog zur Multiplikation als fortlaufende Addition) gesehen werden

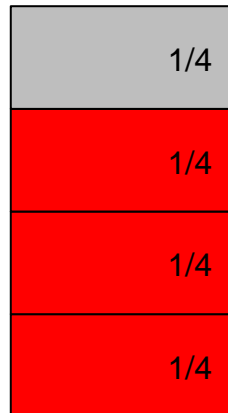


Abbildung 2.18: Dividieren als Messen [adaptiert von Malle (2004)]

$$\frac{3}{4}l - \frac{1}{4}l - \frac{1}{4}l - \frac{1}{4}l = 0 \text{ also}$$

$$\frac{3}{4}l : \frac{1}{4}l = 3$$

Jedoch gibt Malle (2004) an, dass diese Grundvorstellung Grenzen haben kann, wie beispielsweise bei der Division  $\frac{4}{9} : \frac{3}{5}$ .

In den natürlichen Zahlen kann die Division als Umkehroperation der Multiplikation eingeführt werden, ohne auf das Prinzip des Verteilens einzugehen (Padberg & Wartha, 2017, S. 135). Dabei wird das Ergebnis der Division  $16 : 4$  als *die* Zahl definiert, die mit 4 multipliziert 16 ergibt. Auch in der Bruchrechnung ist diese Grundvorstellung tragbar. Denn aus

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$

folgen aufgrund der Grundvorstellung *Division als Umkehroperation*

$$\frac{8}{15} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3}$$

und

$$\frac{8}{15} : \frac{2}{3} = \frac{4}{5}$$

(Padberg & Wartha, 2017, S. 135). Analog zum Vorgehen der natürlichen Zahlen wird das Ergebnis der Division  $\frac{4}{5} : \frac{2}{3}$  als *die* Zahl  $x$ , die mit  $\frac{2}{3}$  multipliziert  $\frac{4}{5}$  ergibt (Padberg & Wartha, 2017, S. 135). In anderen Worten: Es wird die Lösung der Gleichung  $x \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{5}$  gesucht. Nach Padberg & Wartha (2017, S. 135) ist die Grundvorstellung der *Division als Umkehroperation* gut verständlich.

## 2.3 Brüche in der Schule

breites Verwendungsspektrum

In Kapitel 2.2.1 wurde ersichtlich, welche große Palette an Grundvorstellungen zu den Bruchzahlen in der Literatur zu finden ist. Diese Grundvorstellungen basieren unter anderem auch auf den „*unterschiedlichen Verwendungssituationen*“, welche Padberg & Wartha (2017, S. 19–21) anführen: Brüche können als Anteil eines oder mehrerer Ganzer auftreten, wie beispielsweise beim Aufteilen einer oder mehrerer Pizzas. Weiters kann die Bruchzahl eine Maßzahl darstellen und ist somit eine mit einer Maßeinheit kombinierte Größe. Durch die Nutzung als multiplikative Handlungsanweisungen können Brüche auch als Operatoren vorkommen. Ein weiteres Einsatzgebiet der Bruchzahlen ist bei der Angabe von Verhältnissen. Weiters können Bruchzahlen die Resultate einer Division oder die Lösung einer Gleichung sein. Aber auch den Einsatz als Skalenwert oder die Quasikardinalität führen Padberg & Wartha (2017, S. 21) an. Die *unterschiedlichen Verwendungssituationen* sowie deren Beschreibung und ein prototypisches Beispiel sind in Tabelle 2.1 zu finden. Die Darstellung wurde von Padberg & Wartha (2017, S. 19–21) und Reinhold (2019, S. 36) adaptiert.

Tabelle 2.1: Typische Verwendungen von Brüchen [adaptiert von Padberg und Wartha (2017, S. 19-21) und Reinhold (2019, S. 36)]

Verwendung	Beschreibung	Beispiel
Anteil	Bruch als Anteil eines oder mehrerer Ganzer	Anna hat 5 Murmeln und vier davon sind gelb. Also sind $\frac{4}{5}$ von Annas Murmeln gelb.
Maßzahl	Bruch als Maßzahl einer Größe mit Maßeinheit	$\frac{1}{3}$ kg, $\frac{1}{2}$ m
Operator	Bruch $\frac{a}{b}$ als Anweisung „Teile durch $b$ und multipliziere mit $a$ “	$\frac{3}{4}$ von 12 = $(12 : 4) \cdot 3$
Verhältnis	Bruch $\frac{a}{a+b}$ als Bruchangabe zum Verhältnis $a : b$	Bei einem Sirup wird das Mischverhältnis 2 : 7 angegeben, das heißt, dass $\frac{2}{9}$ der Mischung Sirup sind.
Quotient	Bruch $\frac{a}{b}$ wird als Quotient mit Dividend $a$ und Divisor $b$ gesehen	$4 : 5 = \frac{4}{5}$
Lösung linearer Gleichung	Bruch als Element der Lösungsmenge einer linearen Gleichung	$5 \cdot x = 3 \Rightarrow L = \left\{ \frac{3}{5} \right\}$
Skalenwert	Bruch als Bezeichnung einer Stelle auf einer Skala	Zahlenstrahl, Thermometer, Tankanzeige

Verwendung	Beschreibung	Beispiel
Quasikardinalität	Bruch $\frac{a}{b}$ als Größe mit Maßzahl $a$ und $\frac{1}{b}$ als Einheit	4 Neuntel + 3 Neuntel = 7 Neuntel

Obwohl es ein Bestreben sein sollte, dass Schüler\*innen im schulischen Unterricht möglichst viele unterschiedliche Grundvorstellungen entwickeln können, sollte für die Einführung *eine* Grundvorstellung ausgewählt werden (Noll, 2020, S. 31). Die Vorstellung einer Bruchzahl als *Anteil* eines Ganzen ist für das Grundverständnis weiterer Grundvorstellungen (wie beispielsweise *Anteil mehrerer Ganzer* oder *Resultat einer Division*) grundlegend (Noll, 2020, S. 31). Die Bedeutsamkeit des Anteilsbegriffes wird auf internationaler Ebene von Pitkethly & Hunting (1996) und im deutschsprachigen Raum von Padberg & Wartha (2017) und Reinhold (2019) betont. Statt der formalen Definition der Bruchzahlen über Äquivalenzklassen (vgl. Kapitel 2.1) wird bei der Einführung die konkrete Interpretation des Bruchs als Anteil eines Ganzen herangezogen (Pitkethly & Hunting, 1996; Reinhold, 2019; Winter, 1999). Einen alternativen Ansatz zur Einführung über *Anteile* haben G. Brousseau et al. (2014) geschaffen, indem sie Papierstapel und unterschiedlich dickes Papier verwendet haben. Auf eine detaillierte Ausführung dieses Ansatzes wird in der vorliegenden Arbeit verzichtet und stattdessen direkt auf das Werk von G. Brousseau et al. (2014) verwiesen.

Auswahl der Grundvorstellung

Bei der Grundvorstellung des *Bruchs als Anteil* müssen mehrere Komponenten gleichzeitig in den Blick genommen werden: der Teil, der Anteil und das Ganze (Noll, 2020, S. 32; Schink & Meyer, 2013). Dieser Aspekt des Bruches stellt laut Schink & Meyer (2013) eine kognitive Herausforderung für die Schüler\*innen dar. Laut den Autoren wird ein Bruch nicht mehr als eine Zahl gedeutet, sondern bezieht sich als *Anteil* auf ein Referenzobjekt: *das Ganze*. Weiters wird zur Bestimmung des *Anteils* die Ermittlung eines *Teils* benötigt. Somit gilt nach Schink & Meyer (2013, S. 3):

Trias der Bruchzahl

„Ein einzelner Bruch besteht aus der Trias von dem Anteil (der die Beziehung zwischen dem Teil und dem Ganzen ausdrückt), dem Ganzen (auf das sich der Anteil bezieht und von dem der Teil betrachtet wird) und dem Teil (der von einem bestimmten Ganzen genommen wird und eine durch den Anteil ausgedrückte Beziehung zu ihm unterhält).“

Laut Schink & Meyer (2013) sind diese drei Komponenten beim Umgang mit Brüchen unzertrennbar miteinander verwoben und lassen sich deshalb nur zirkulär erklären. Die unterschiedlichen Komponenten sind in Abb. 2.19 visualisiert.

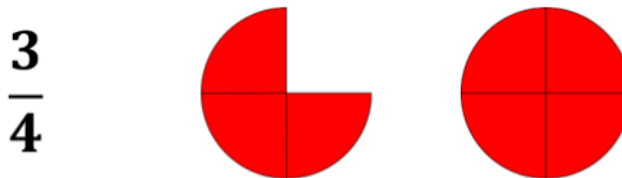


Abbildung 2.19: Trias bestehend aus Anteil, Ganzes und Teil [entnommen aus Noll (2020, S. 32)]

Auf Basis der unterschiedlichen Ausprägungen der Bedeutung von Brüchen ergeben sich unterschiedliche Schwierigkeiten struktureller Art (Schink & Meyer, 2013). Die Autoren nennen unter

anderem die Fragen „Wie muss der Bruch in der Situation gedeutet werden?“ oder „Was ist das Ganze?“. Eine weitere Herausforderung in diesem Bereich ist, dass Teil, Anteil und Ganzes unterschiedliche Erscheinungsformen aufweisen können, welche „zum einen an ihre (außermathematische) Repräsentation (Wassermenge, Guthaben, Preis, ...), zum anderen an (damit oftmals verbundene) unterschiedliche ‘physische’ Qualitäten gebunden sind“ (Schink & Meyer, 2013, S. 3). Diese unterschiedlichen Repräsentationen führen laut Schink (2013, S. 42–48) zu einigen Hürden.

Schreibweisen und Darstellung

Nicht nur die Erscheinungsform kann unterschiedliche repräsentiert werden, die Bruchzahlen weisen auch diverse Schreibweisen und Repräsentanten auf. Während die natürlichen Zahlen über eine eindeutige Schreibweise verfügen, besitzen Brüche unterschiedliche Formen, wie Padberg & Wartha (2017, S. 31) und Schlögl (2018, S. 47) aufzählen:

- Gemeiner Bruch als geschriebenes Zahlzeichen, wie beispielsweise  $\frac{1}{4}$
- Gemeiner Bruch als gesprochenes Zahlwort, wie zum Beispiel ein Viertel
- Dezimalbruch, wie z.B. 0.25
- Maßstab, beispielsweise 1 : 250000
- Verhältnis (z.B. 3 : 4)
- Quotient (wie beispielsweise 5 : 6)
- Prozent (z.B. 25%, vgl. Kapitel 3)
- Promille (wie 4 Promille)

In den unterschiedlichen Schreibweisen sind wiederum auch einige der Grundvorstellungen des Kapitels 2.2.1 mitbedacht. Neben den diversen Schreibweisen, nennen Padberg & Wartha (2017, S. 31) variantenreiche Repräsentationen der Bruchzahlen. Dabei merken sie an, dass im schulischen Bereich vor allem die geometrische Repräsentation mittels Figuren und Bildern von Brüchen eingesetzt wird. Insbesondere Rechtecke (vgl. Abb. 2.16), Kreise (vgl. Abb. 2.2) oder Strecken (vgl. Abb. 2.7) werden oftmals dafür herangezogen (Feijs et al., 2008, S. 66–79; Padberg & Wartha, 2017, S. 32). Feijs et al. (2008, S. 73–78) sprechen unter anderem vom großen Potential von Bruchstreifen. Die Autoren merken an, dass Bruchstreifen und Zahlenstrahle gleichermaßen geeignet sind, um die Beziehung zwischen der realen Situation und des Bruches zu visualisieren. In Abb. 2.20 ist diese Bemerkung von Feijs et al. (2008, S. 75) mithilfe des Beispiels einer Tankanzeige visualisiert.

Des Weiteren führen Padberg & Wartha (2017, S. 32) an, dass Gegenstände aus dem alltäglichen Leben zu Repräsentationszwecken für Brüche herangezogen werden können. So wird der Zugang über das Aufteilen von Pizza beispielsweise im Schulbuch *Mach mit Mathematik PTS* von Floderer et al. (2013, S. 32) gewählt. Padberg & Wartha (2017, S. 32) führen noch die Repräsentationsmöglichkeit von Brüchen über Rechengeschichten oder Verteilungssituationen an. Zur adäquaten Auswahl der Repräsentation entwickelten Padberg & Wartha (2017, S. 32) folgende Kriterien:

- *Ist das Ganze klar zu erkennen?*
- *Kann man die Unterteilungen leicht und auf verschiedene Arten durchführen?*
- *Wie sieht es mit der Einsetzbarkeit im weiteren Verlauf der Bruchrechnung aus?*

Weiters empfehlen die Autoren, dass das benutzte Modell so beschaffen sein muss und eingesetzt wird, dass es *mental* repräsentiertbar ist. Eine Visualisierung um des Visualisierens Willen ist demnach nicht der optimale und zielführende Weg.



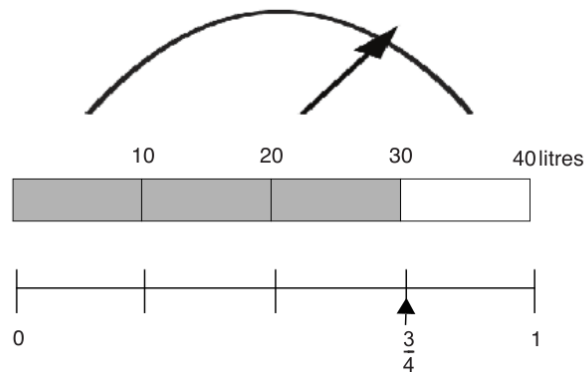


Abbildung 2.20: Bruchstreifen und Zahlenstrahl [entnommen von Feijs u. a. (2008, S. 75)]

Wie bereits von Pitkethly & Hunting (1996), Padberg & Wartha (2017), Reinhold (2019) und Winter (1999) erwähnt, ist die Einführung der Bruchzahlen über die Grundvorstellung *Anteil eines Ganzen* ein gangbarer Weg. Schink (2013, S. 56–58) entwickelte drei Konstellationen um den *Anteil eines Ganzen* möglichst umfassend zu behandeln. Dieses Konzept fällt bei Padberg & Wartha (2017, S. 34–36) unter den Namen *drei Grundaufgaben des Bruchrechnenunterrichts*. Die drei Konstellationen beziehungsweise Grundaufgaben sind in Abb. 2.21 von Padberg & Wartha (2017, S. 35) basierend auf der Idee von Schink (2013, S. 56) visualisiert.

Einführung über drei  
Grundaufgaben

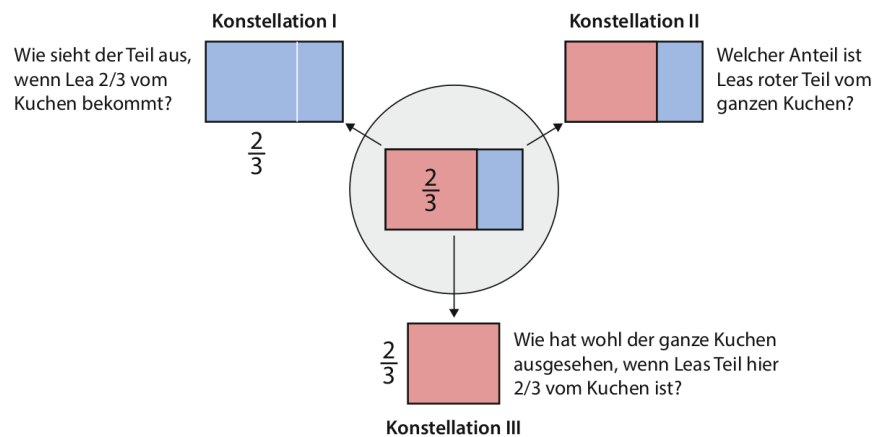


Abbildung 2.21: Drei Konstellationen [entnommen von Padberg und Wartha (2017, S. 35)]

**Grundaufgabe I:** Bei diesem Typ sind Ganzes und Anteil gegeben, der Teil ist gesucht (Schink, 2013, S. 57). I: Teil ist gesucht

*Vor Lea liegt ein großes Stück Pflaumenkuchen. Hiervon bekommt sie zwei Drittel. Wie*

*groß ist Leas Teil?* - (Padberg & Wartha, 2017, S. 34)

Wenn Lea weiß, wie der Kuchen (das Ganze) aussieht und dass sie einen Anteil von  $\frac{2}{3}$  bekommt, kann sie sich die Größe ihres Kuchenstücks (das Teil) ausrechnen beziehungsweise visualisieren (Schink, 2013, S. 57). Durch den Zusammenhang der Trias kann sie laut Schink (2013, S. 57) ihren Teil bestimmen: Der Kuchen muss in drei gleichgroße Stücke geschnitten werden. Danach darf sich Lea zwei dieser Stücke nehmen und hat den gesuchten Teil gefunden. Schink (2013, S. 57) betont, dass die Zerlegung des Ganzen bei dieser Grundaufgabe entscheidend ist: „*Einen Anteil nehmen bedeutet, dass man das Ganze zerlegt und sich dann für einen bestimmten Teil des Ganzen interessiert.*“

II: Anteil ist gesucht

**Grundaufgabe II:** Das Ganze und der Teil sind in dieser Aufgabe gegeben, der Anteil muss berechnet werden. (Schink, 2013, S. 57).

*Vor Lea liegt ein großes Stück Pflaumenkuchen, von dem ihr Teil abgeschnitten ist. Welchen Anteil hat Leas Teil am großen Stück Pflaumenkuchen?* - (Padberg & Wartha, 2017, S. 34)

Da Lea den Kuchen (das Ganze) kennt und weiß, wie groß ihr Teil ist, kann sie auch den Anteil bestimmen (Schink, 2013, S. 57). Schink (2013, S. 57) schlägt zwei Vorgehensweisen vor, um den Anteil des Kuchens zu bestimmen. Einerseits kann Lea den Anteil des Kuchens erhalten, indem sie sich überlegt, wie oft ihr Teil vollständig in den ganzen Kuchen (das Ganze) *passt*. Falls eine solche Aufteilung möglich ist, ist der Anteil des Teils als Stammbruch beschreibbar. Andererseits kann sich Lea überlegen, in welche gemeinsame Stückgröße (gemeinsame Unterteilung) der Kuchen (das Ganze) und ihr Teil aufteilbar ist. Dann muss Lea noch die Frage beantworten, wie viele dieser Stücke zusammen so groß wie ihr Teil sind. Laut Schink (2013, S. 57) wird der Fokus auf den Zusammenhang zwischen Teil und Ganzem gelegt: Das Ganze setzt sich aus dem Teil und dem Rest zusammen.

III: Ganzes ist gesucht

**Grundaufgabe III:** Im letzten Typ sind sowohl Teil als auch Anteil gegeben, dementsprechend muss das Ganze gesucht werden. (Schink, 2013, S. 57).

*Leas Teil (konkret als Stückchen Kuchen dargestellt) ist  $\frac{2}{3}$  von dem großen Stück Pflaumenkuchen. Wie groß ist dieses Stück?* - (Padberg & Wartha, 2017, S. 35)

Bei dieser Grundaufgabe kennt Lea das Kuchenstück (den Teil) und den Anteil von  $\frac{2}{3}$  vom gesamten Kuchen und kann dadurch das Ganze bestimmen (Schink, 2013, S. 57). Im Gegensatz zu den *Grundaufgaben I* und *II* wird nicht die Zerlegung des Ganzen bestimmt, sondern auf der Basis der bekannten Zerlegung des Ganzen wird auf einen Repräsentanten auf das ursprüngliche Ganze geschlossen (Padberg & Wartha, 2017, S. 35). Falls es sich beim Anteil um einen Stammbruch ( $\frac{1}{n}$ ) handelt, muss das Teil nur  $n$ -mal aneinandergelegt werden, um das Ganze zu rekonstruieren (Padberg & Wartha, 2017, S. 35; Schink, 2013, S. 57). Wenn es sich nicht um einen Stammbruch (wie zum Beispiel  $\frac{m}{n}$ ) handelt, geben die Autoren folgenden Weg an: Das Teil wird in  $m$  gleich große Stücke zerlegt und anschließend wird eines der neuen Teilstücke  $n$ -mal aneinandergelegt. Laut Padberg & Wartha (2017, S. 35) kommt dieser Aufgabentyp in der Schule selten vor und die Thematisierung ist für Schüler\*innen nicht einfach.

Bruchzahlen

Die Einführung von Bruchzahlen kann mittels dem von Padberg & Wartha (2017, S. 32) erwähnten

Repräsentanten *alltägliche Gegenstände* erfolgen. So ist im Schulbuch *Genial! Mathematik 1* von Beer et al. (2019a, S. 154+155) auch der Zugang über Lebensmittel und ihre Verpackungseinheiten (wie beispielsweise  $\frac{3}{4}$  Liter Milch oder  $\frac{1}{4}$  Kilogramm Butter) gewählt. Auch Floderer et al. (2013, S. 32) verwenden in ihrem Schulbuch diesen Ansatz. Die Bruchschreibweise wird von Beer et al. (2019a, S. 158) wie in Abb. 2.22 eingeführt.

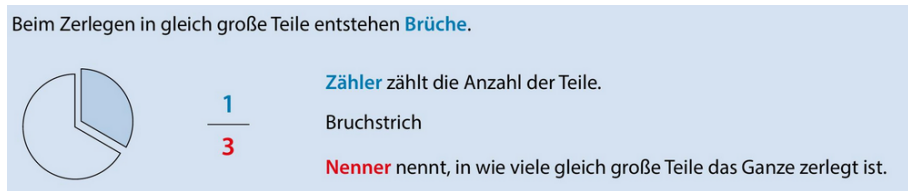


Abbildung 2.22: Drei Konstellationen [entnommen von Beer u. a. (2019a, S. 158)]

Diese Einführung legt den Fokus unter anderem auf die gleich großen Teilstücke der Unterteilung des Ganzen und fällt damit unter die Grundvorstellung *Anteil eines Ganzen*. Um die Äquivalenz der Brüche sichtbar zu machen, zeigen Beer et al. (2019a, S. 161) Aufgaben ähnlich zu Abb. 2.23 auf.

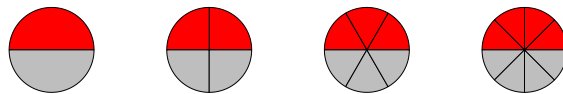


Abbildung 2.23: Äquivalenz von Brüchen [adaptiert von Beer u. a. (2019, S. 161)]

Dadurch wird ersichtlich, dass die Bruchzahlen im Gegensatz zu den natürlichen Zahlen keine eindeutige Schreibweise besitzen. Diese Schwierigkeit setzt sich auch im sprachlichen Gebrauch fort. Laut Rollnik (2009, S. 59–61) ist die Idee hinter den Begriffen *Bruch* und *Bruchzahl*, dass zwischen der Zahl (*Bruchzahl*) und ihrer Darstellung (*Bruch*) unterschieden werden soll. Diese Unterscheidung könnte die Vorstellung der Äquivalenz von Brüchen unterstützen, jedoch verwenden Schulbücher (Rollnik, 2009, S. 60), didaktische Texte (wie beispielsweise der Text von Reinhold (2019)) aber auch die vorliegende Arbeit die beiden Begriffe analog. Die Einsicht über die nicht eindeutige Schreibweise der Bruchzahlen über den sprachlichen Gebrauch ist somit äußerst schwierig. Padberg & Wartha (2017, S. 37) schlagen als unterrichtlichen Zugang zu den Bruchzahlen den Zahlenstrahl vor. Neben den natürlichen Zahlen können auch Bruchzahlen am Zahlenstrahl dargestellt werden (Feijs et al., 2008, S. 75; Padberg & Wartha, 2017, S. 37). Brüche  $\frac{m}{n}$  mit  $\frac{m}{n} \leq 1$  können am Zahlenstrahl zwischen 0 und 1 dargestellt werden (Padberg & Wartha, 2017, S. 37). Weiters geben die Autoren an, dass Brüche  $\frac{m}{n}$  mit  $\frac{m}{n} > 1$  auch am Zahlenstrahl abgetragen werden können und dies vor allem in Form als gemischte Zahl ein leichtes Unterfangen ist. In Abb. 2.24 wird deutlich, dass – im Gegensatz zu den natürlichen Zahlen – mehrere (unendlich viele) Brüche an einem einzelnen Punkt stehen, wie beispielsweise  $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \dots$ . Gleichzeitig ist ersichtlich, dass die natürlichen Zahlen durch Bruchzahlen darstellbar sind ( $2 = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \dots$ ).

Anhand Abb. 2.24 kann auch das Äquivalenzklassenkonzept implizit mitbedacht werden, denn die Klassenbildung der gleichwertigen Schreibweisen für dieselbe Bruchzahl ist gut erkennbar (Padberg & Wartha, 2017, S. 37). Laut den Autoren ist dieser Ansatz ausbaufähig, da er nicht nur bei den

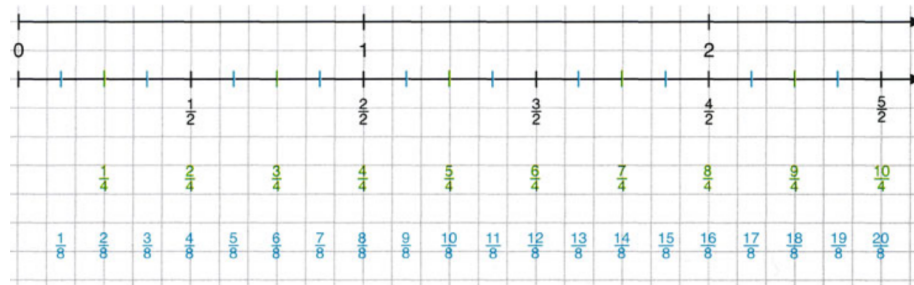


Abbildung 2.24: Bruchzahlen am Zahlenstrahl [entnommen von Padberg und Wartha (2017, S. 37)]

natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen verwendet werden kann, sondern auch für reelle Zahlen tragfähig ist.

## Kürzen und Erweitern

Im Kapitel 2.2.1 wurden zum Zugang zu den Bruchzahlen weitaus mehr Grundvorstellungen aufgezählt, aus diesem Grund wurde die Einführung der Bruchzahlen in der Schule etwas kürzer gehalten. Auch beim Bereich des Kürzens und Erweiterns folgt nur eine kurze Darstellung der schulischen Einführung. Das Kürzen und Erweitern kann mittels der Grundvorstellung *Kürzen als Vergrößern und Erweitern als Verfeinern* thematisiert werden (Padberg & Wartha, 2017, S. 47; Schink, 2013, S. 178). Grafische Abbildungen wie Abb. 2.23 werden in unterschiedlichen Schulbüchern – unter anderem von Beer et al. (2019b) oder Floderer et al. (2013) – genutzt, um eine bildhafte Vorstellung auszuprägen. Abb. 2.25 zeigt exemplarisch die Definition des Erweiterns des Schulbuchs von Beer et al. (2019b, S. 52).

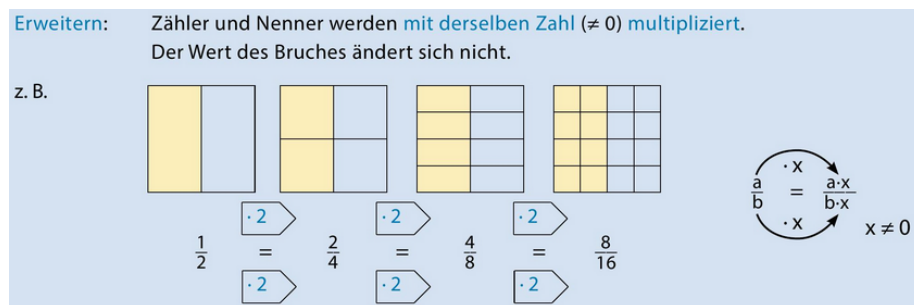


Abbildung 2.25: Bruchzahlen am Zahlenstrahl [entnommen von Beer (2019b, S. 52)]

Ähnlich zu Padberg & Wartha (2017, S. 43) wird die Darstellung eines Rechteckes mit immer weiter verfeinerten Unterteilungen gewählt (vgl. Abb. 2.12 und Abb. 2.25). Der Zusatz von Beer et al. (2019b, S. 52) des nicht veränderten Wertes des Bruches benötigt eine Vorstellung der Schüler\*innen bezüglich gleichwertiger Brüche. Die Gleichwertigkeit von Brüchen ist nach Padberg & Wartha (2017, S. 42) eine Voraussetzung für die Grundvorstellung des Verfeinerns und Vergrößerns. Laut Prediger (2006b, S. 1) macht es einen Unterschied, „ob das Erweitern und Kürzen formal eingeführt wird und gleichwertige Brüche als diejenigen definiert werden, die durch Erweitern und Kürzen auseinander hervorgehen (wie in vielen Schulbüchern), oder ob Erweitern und Kürzen als der syntaktische Weg zum Finden gleichwertiger Brüche erst eingeführt wird, wenn zuvor Gleich-

wertigkeit als inhaltliches Konzept in verschiedenen Bruchvorstellungen bestimmt ist“. Sie schlägt vor, dass das Erweitern und Kürzen die rechnerische Suche nach gleichwertigen Brüchen ist.

Im Gegensatz zu den natürlichen Zahlen können die Bruchzahlen nicht anhand der Ziffernschreibweise miteinander verglichen werden (Padberg & Wartha, 2017, S. 55). Laut den beiden Autoren gibt es sehr viele verschiedene Strategien, um Brüche der Größe nach zu vergleichen, jedoch setzen diese Strategien anschauliche Vorstellungen von Brüchen bei den Schüler\*innen voraus. Reinhold & Reiss (2020) unterscheiden dabei *eigenschaftsbasierte Strategien*, in welchen Vergleiche semantisch begründet werden und *regelbasierte Strategien*, in denen Vergleiche nach formalisierten Regeln durchgeführt werden. Zu den eigenschaftsbasierten Strategien gehört die *transitive Strategie*, bei der der Größenvergleich über den Bezug zu einer dritten Zahl durchgeführt wird, welche zwischen den beiden zu vergleichenden Brüchen liegt (Reinhold & Reiss, 2020). Typische Referenzwerte für diese Strategie sind 1 und  $\frac{1}{2}$ . Laut Reinhold & Reiss (2020) bietet sich beim Vergleich von

Größenvergleich

$$\frac{2}{5} \stackrel{?}{\square} \frac{7}{8}$$

der Bruch  $\frac{1}{2}$  an. Dann folgt aus  $\frac{2}{5} < \frac{1}{2}$  und  $\frac{1}{2} < \frac{7}{8}$

$$\frac{2}{5} < \frac{7}{8}.$$

Als größere Herausforderung gilt die *residuale Strategie* (eigenschaftsbasierte Strategie) für Schüler\*innen (Reinhold & Reiss, 2020). Bei dieser Strategie wird für den Größenvergleich die Frage gestellt, „wie viel“ den beiden Brüchen zum vollständigen Ganzen fehlt (Reinhold & Reiss, 2020). Beim Größenvergleich von  $\frac{7}{8}$  und  $\frac{8}{9}$  wird jeweils das Teilstück, welches zum Ganzen fehlt, verglichen (vgl. Abb. 2.26) und argumentiert, dass  $\frac{1}{8}$  größer als  $\frac{1}{9}$  ist (Reinhold & Reiss, 2020).

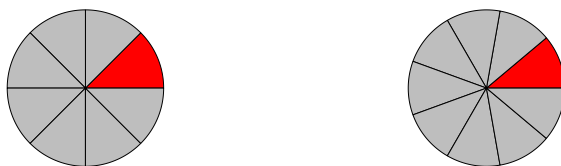


Abbildung 2.26: Residuale Strategie bei Brüchen

Eine weitere Strategie der eigenschaftsbasierten Strategien ist laut Reinhold & Reiss (2020) der Rückgriff auf die *Größe der Stücke*. Besonders hilfreich für diese Strategie sind ikonische Darstellungen, wie beispielsweise das Vergleichen der Stücke in Abb. 2.26. Weiters geben Reinhold & Reiss (2020) an, dass die darauf aufbauenden Strategien die semantische Bedeutung des Nenners nutzen, da kleinere Nenner zu größeren Stücken führen. Das zentrale Merkmal eigenschaftsbasierter Vergleichsstrategien ist, dass sie nicht grundsätzlich zielführend sind, sondern nach den Eigenschaften des zu vergleichenden Bruchzahlpaares ausgewählt werden müssen (Reinhold, 2019; Reinhold & Reiss, 2020; Winter, 1999). Dadurch ist die Suche „nach geeigneten eigenschaftsbasier[enden] Vergleichsstrategien zur Ausbildung eines tragfähigen Bruchzahlbegriffs gewinnbringend“ (Reinhold

& Reiss, 2020, S. 10). Im Gegensatz dazu gründen sich die *regelbasierte Vergleichsstrategien* auf einem formalisierten und algorithmischen Vorgehen (Reinhold, 2019, S. 80). Zu den regelbasierten Vergleichsstrategien gehören nach Reinhold (2019, S. 81) und Reinhold & Reiss (2020) folgende Strategien:

- *Gleicher-Nenner-Strategie*: Durch Erweitern oder Kürzen werden zwei Brüche auf den Nenner gebracht und anschließend die Zähler verglichen. Der Bruch, mit dem größeren Zähler ist somit größer.
- *Gleicher-Zähler-Strategie*: Im Gegensatz zur *Gleicher-Nenner-Strategie* werden hier die Brüche auf den gleichen Zähler gebracht und anschließend basierend auf dem Nenner verglichen. Der Bruch mit dem kleineren Nenner ist dann der größere Bruch der beiden.

Der *Vorteil* von regelbasierten Vergleichsstrategien ist die universelle Gültigkeit, da diese Strategien bei jedem Größenvergleich einsetzbar sind (Reinhold & Reiss, 2020). Jedoch kann diese Strategie auf das reine Kalkül reduziert werden und Schüler\*innen könnten die Strategien „*blindlings*“ und ohne tieferes Verständnis anwenden (Reinhold & Reiss, 2020; Winter, 1999, S. 38). So sprechen sich auch Eichelmann et al. (2012) dafür aus, dass bei der Bruchrechnung keine zu starke Fokussierung auf dem Kalkül liegen sollte. Eine weitere ikonische Darstellungsmöglichkeit zum Größenvergleich von Brüchen sind Streifentafeln, welche laut Prediger (2011) auch beim Erweitern hilfreich sein können.

Addieren und Subtrahieren

Laut Hußmann (2019) ist es nicht für jeden Lerngegenstand möglich einen authentischen Kontext zu finden und so würde sich für die Addition von Brüchen eher innermathematische Aktivitäten eignen. Für ein konzeptuelles Verständnis der beiden Rechenoperationen Addition und Subtraktion kann die Darstellung über Bruchstreifen gewählt werden (Feijs et al., 2008; Hußmann, 2019; Prediger, 2011). Exemplarisch wird das Vorgehen der Addition  $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$  mit Bruchstreifen (vgl. Abb. 2.27 angelehnt an Hußmann (2019) dargestellt.

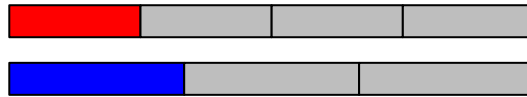


Abbildung 2.27: Brüche mittels Bruchstreifen darstellen

Anhand der beiden Bruchstreifen aus Abb. 2.27 ist ersichtlich, dass die Addition von  $\frac{1}{3}$  und  $\frac{1}{4}$  nicht durch Zusammenlegen der einzelnen Blöcke möglich ist, da die Unterteilungen unterschiedlich sind. Deshalb wird eine gemeinsame Unterteilung anhand der Bruchstreifen gesucht. Innermathematisch werden die beiden Brüche durch Erweitern oder Kürzen auf denselben Nenner gebracht.



Abbildung 2.28: Wahl gemeinsamer Unterteilungen bei Brüchen

Aufgrund der gemeinsamen Unterteilung (unter Verwendung der Gleichwertigkeit von Brüchen) kann die Addition durch Zusammenlegen der einzelnen Blöcke aus Abb. 2.28 durchgeführt werden.



Abbildung 2.29: Ergebnis der Bruchaddition zusammenfassen

In Abb. 2.29 ist die Addition ersichtlich und es gilt  $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ . Anhand dieses Vorgehens kann die *formale* Definition der Addition und Subtraktion von Brüchen, wie beispielsweise von Büchter et al. (2019, S. 6) oder Siegert (2018, S. 1) angegeben werden:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}.$$

Laut Feijs et al. (2008, S. 81) macht die Multiplikation den Schüler\*innen keine Schwierigkeiten, solange sie als wiederholte Addition gedeutet werden kann, wie beispielsweise bei der Multiplikation eines Bruches mit einer natürlichen Zahl. Ansonsten ist ein Zugang über das Betrachten von Flächen nach Feijs et al. (2008) oder Padberg & Wartha (2017) ein gangbarer Weg, sodass ein grundsätzliches Verständnis aufgebaut werden kann. Da im Kapitel 2.2.1.4 ausführlich die Grundvorstellungen behandelt wurden, wird an dieser Stelle noch die Definition – wie aus unterschiedlichen Schulbüchern von Floderer et al. (2013) oder Beer et al. (2019b) bekannt – dargestellt. So kann die Multiplikation durch

Multiplizieren und Dividieren

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

und die Division durch

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

berechnet werden (Siegert, 2018, S. 1). In Bezug auf das Bruchrechnen in der Schule merken Feijs et al. (2008, S. 87) an, dass die die Relation von „Anteil von“ und „mal“ eine große Schwierigkeit für die Schüler\*innen darstellen kann, da die bis dato konstruierte Vorstellung der Multiplikation radikal geändert wird. Diese Vorstellung wurde jahrelang ausgeprägt *„and it is therefore unlikely that a brief explanation or a few lessons will offer a solution. This is why this theme must be addressed regularly and in different ways“* (Feijs et al., 2008, S. 87).

Auch der Umgang mit Dezimalbrüchen ist keineswegs so trivial und mühelos, wie angenommen wird (Sprenger, 2017, S. 19). Diese Problematik ist vor allem in unzureichendem Stellenwertverständnis sowie nicht-tragfähigen Bruchvorstellungen begründet (Sprenger, 2017, S. 20). Die Nähe zu den natürlichen Zahlen kann bei den Dezimalbrüchen laut Heckmann & Padberg (2007) zu fehlerhaften Übertragungen führen. Die beiden Autoren geben an, dass es bei Dezimalbrüchen wichtig ist, dass ein Zehntel als zehnter Teil eines Ganzen erkannt wird. Dadurch muss auch für Dezimalbrüche die Grundvorstellung *Anteil eines Ganzen* ausgeprägt sein (Heckmann & Padberg, 2007). Sprenger (2017, S. 65–70) beschreibt vier grundlegende Zugänge zur Dezimalbruchrechnung, welche im Folgenden kurz umrissen sind.

Dezimalbrüche

- *Zugang über die Stellenwerte:* Diese Interpretation des Dezimalbruchs basiert auf der Summe seiner Stellenwerte. Dabei wird das dezimale Stellenwertsystem der natürlichen Zahlen für die rationale Zahlen aufgegriffen und fortgeführt. Besonders hervorzuheben ist, dass die Darstellung in der Stellenwerttafel sowie die Grundvorstellung der *Brüche als Quasikardinalzahl* eine besondere Rolle spielen. Erklärend muss hier noch angeführt werden, dass der Begriff *Dezimalbrüche* auch verwendet wird, wenn die rationale Zahl in Form einer Dezimalzahl und nicht als Bruch gegeben ist (Reiss & Schmieder, 2014, S. 278). Dies korrespondiert auch mit den unterschiedlichen Schreibweisen, welche Padberg & Wartha (2017, S. 32) anführen.
- *Zugang über Zehnerbrüche:* Da jeder Dezimalbruch als Zehnerbruch in der Form  $\frac{n}{10^i}$  mit  $n \neq 0$  und  $i > 0$  interpretiert werden kann, ist der Zugang zu Dezimalbrüchen über gemeine Brüche möglich. Die Grundvorstellung des *Anteil eines Ganzen* spielt bei diesem Zugang eine essenzielle Rolle. Dieser Zugang setzt jedoch ein tieferes Verständnis der Schüler\*innen für die Bruchrechnung und das Bruchverständnis voraus.
- *Zugang über Größen:* Dieser Zugang greift auf die Kommaschreibweise gegebener Größen, wie beispielsweise 2,45 kg, zurück. Vorteilhaft beim Zugang über Größen ist, dass Anknüpfungspunkte an die Erfahrungswelt der Schüler\*innen gegeben sind. Visualisierungsmöglichkeiten bietet zum Beispiel ein Maßband, welches dann auf die Zahlengerade abstrahiert werden kann.
- *Zugang durch Rückgriff auf Kommaschieberegeln:* Die Kommaschieberegeln der natürlichen Zahlen stehen bei diesem Zugang im Vordergrund. Dezimalbrüche werden zuerst mittels Multiplikation oder Division mit Zehnerpotenzen in natürliche Zahlen umgeformt und danach wird mit den umgeformten Zahlen operiert. Dieser Zugang benötigt die Bruchrechenregeln weitestgehend nicht.

Die vier Zugänge nach Sprenger (2017, S. 65–70) variieren in ihrer Abstraktheit und Einsatzmöglichkeit. Im Zuge der Bruchrechnung ist der *Zugang über Zehnerbrüche* der naheliegendste.

### 2.3.1 Typische Schülerfehler in der Bruchrechnung

Trotz der unterschiedlichen Grundvorstellungen und Zugänge zu den Bruchzahlen ist die Bruchrechnung für die Schüler\*innen mit einigen Schwierigkeiten verbunden. Dieses Unterkapitel soll einen Überblick über die typischen Schülerfehler im Bereich der Bruchrechnung geben, wobei vor allem auf die Arbeiten von Eichelmann et al. (2012), Padberg (2012) und Reinhold (2019) referenziert wird.

fehlerfreies Rechnen vs. Bruchvorstellung Fehlerfreies Rechnen (*prozedurales Wissen*) der Schüler\*innen bedeutet nicht, dass diese adäquate Bruchvorstellungen (*konzeptuelles Wissen*) besitzen (Eichelmann et al., 2012). Weiters ist das inhaltliche Denken und das Kalkül oftmals unverbunden, was sich laut Schink (2013, S. 19) in der korrekten Lösung der reinen Kalkülaufgabe gegenüber der Unsicherheit bezüglich Textaufgaben bei Brüchen widerspiegelt. In vielen Fällen beruhen die Fehler der Schüler\*innen im Bereich der Bruchrechnung auf fälschlichen Übertragungen intuitiver Vorstellungen aus dem Bereich der natürlichen Zahlen (Wartha, 2009). Schink (2013) und Prediger (2007) sprechen in dieser Hinsicht treffenderweise von  $\mathbb{N}$ -Verführern.

Kategorien von Fehlern Fehleranalysen gelten als relevante Quelle von Denkprozessen der Schüler\*innen und bilden die Grundlage, um beispielsweise den Bruch zwischen prozeduralem und konzeptuellem Wissen zu eruieren (Reinhold, 2019, S. 36). Laut Eichelmann et al. (2012) und Reinhold (2019, S. 36+37) können aus mathematischer Sicht drei Kategorien der Fehler unterschieden werden:



- *Flüchtigkeitsfehler* entstehen aus Unachtsamkeit. Diese Fehler können sofort korrigiert werden, wenn die jeweilige Person darauf aufmerksam gemacht wird.
- *Systematische Fehler* deuten auf ein ungenügendes Verständnis hin, da sie bei bestimmten Aufgabentypen immer wieder auftreten. Wenn die Person auf den Fehler aufmerksam gemacht wird, erklärt diese ihren Rechenweg, anstatt den Fehler zu korrigieren.
- *Typische Fehler* werden von unterschiedlichen Personen gemacht und zeigen die größten Schwierigkeiten eines Themengebiets auf.

Durch Fehleranalysen sollen die typischen Fehler innerhalb eines Anforderungsbereiches identifiziert werden (Eichelmann et al., 2012). Die Autoren dokumentieren in einem Review basierend auf 33 nationalen und internationalen Studien insgesamt 58 typische Fehler im Bereich der Bruchrechnung.

Probleme beim Bruchrechnen lassen sich in den meisten Fällen nicht auf rechnerische Defizite, sondern auf nicht adäquat entwickelte inhaltliche Vorstellungen zurückführen (Eichelmann et al., 2012). Die Hauptursachen für den fehlerhaften Umgang mit Brüchen fasst Misquitta (2011) folgendermaßen zusammen:

Hauptursachen für Fehler




- Die Verbindung von Bruchvorstellungen und intuitivem Wissen über Brüche mit der formalen Darstellung ist problematisch.
- Ein intuitives Rechnen mit den Fingern ist nicht mehr möglich.
- Vorstellungen über natürliche Zahlen werden auf die rationalen Zahlen übertragen.
- Die Dominanz der Grundvorstellung *Anteil eines Ganzen* erschwert das Verständnis von unechten Brüchen.

Laut Padberg (2012, S. 40) sind die Grundvorstellungen *Anteil eines Ganzen* und *Anteil mehrerer Ganzer* bei den Schüler\*innen relativ schwach ausgeprägt. Weiters merkt er an, dass diese *Unsicherheit des Fundaments* dazu führen kann, dass im weiteren Verlauf der Bruchrechnung eine große Anzahl von Fehlvorstellungen entstehen.

Zur Repräsentation von Brüchen werden oftmals grafische Darstellungen wie der Zahlenstrahl oder Anteile von Rechtecken und Kreisen herangezogen (Eichelmann et al., 2012). Laut den Autoren muss beim Repräsentieren von Brüchen die Darstellungsform (symbolisch, numerisch, sprachlich) gewechselt werden. In Tabelle 2.2 sind drei der Fehlvorstellungen aufgelistet, weitere Fehlvorstellungen sind bei Eichelmann et al. (2012) zu finden.

Fehler beim Repräsentieren

Tabelle 2.2: Typische Fehler bei der Verwendung ikonischer Repräsentationen [nach Eichelmann u. a. (2012)]

Fehlerstrategie	Beispiel
Teil-zu-Teil	 → $\frac{4}{2}$
Anzahl-der-Teile	 → 4
Flächen-statt-Teile	 → $\frac{3}{5}$

Bei der *Teil-zu-Teil-Strategie* dominiert stark die Anzahl der Teile (Eichelmann et al., 2012). Dabei wird die Anzahl der markierten Teile in Beziehung mit der Anzahl der nicht-markierten Teile

gesetzt, anstatt die Gesamtzahl der Teile als Referenzwert zu wählen (Reinhold, 2019, S. 37). Der Kardinalzahlaspekt der natürlichen Zahlen überwiegt bei der *Anzahl-der-Teile-Strategie* und dadurch geben die Schüler\*innen die Anzahl der markierten Teile als natürliche Zahl an (Reinhold, 2019, S. 37). Bei der Verwendung der *Flächen-statt-Teile-Strategie* wird nur auf die Anzahl an markierten Flächen geachtet, ohne Berücksichtigung der unterschiedlichen Größen der Teilstücke (Reinhold, 2019, S. 37). Weitere fehlerhafte Strategien bilden sich bei der Verwendung des Zahlenstrahls aus (Eichelmann et al., 2012), wobei der Zahlenstrahl für Schüler\*innen eine größere Hürde darstellt als die Verwendung von Flächen (Herden & Pallack, 2000).

Fehler beim Umwandeln

Das Umwandeln von Brüchen gehört zu den basalen Fertigkeiten in der Bruchrechnung (Eichelmann et al., 2012). Dabei sollte das Umwandeln von gemischten Zahlen in unechte Brüche und von natürlichen Zahlen in Brüche flüssig funktionieren. In Tabelle 2.3 sind fünf der 17 beschriebenen Schülerfehler von Eichelmann et al. (2012) bezüglich der Umwandlung von Brüchen aufgelistet.

Tabelle 2.3: Typische Fehler bei der Umwandlung von gemischten Zahlen [nach Eichelmann u. a. (2012)]

Fehlerstrategie	Beispiel
Zahl-mit-Zähler-Multiplikation	$9\frac{4}{7} = \frac{36}{7}$
Zahl-mit-Zähler-Addition	$9\frac{4}{7} = \frac{13}{7}$
Ignorieren-des-Zählers	$9\frac{4}{7} = \frac{63}{7}$
Identität	$\frac{7}{7} = 7$
Nenner-ist-Zahl	$\frac{1}{7} = 7$

Bei der *Zahl-mit-Zähler-Multiplikationsstrategie* wird die ganze Zahl mit dem Zähler multipliziert, um die gemischte Zahl in einen Bruch umzuwandeln (Eichelmann et al., 2012). Ein Problemaspekt kann in diesem Fall sein, dass die Schüler\*innen die gemischte Zahl  $9\frac{4}{7}$  nicht als die korrekte Form  $9 + \frac{4}{7}$  interpretieren, sondern der aus CAS-Systemen bekannten Notation  $9 \cdot \frac{4}{7}$  folgen. Die Schreibweise der gemischten Zahl als Kurzform der Summe ist vielen Schüler\*innen nicht bewusst (Eichelmann et al., 2012; Padberg, 2012, S. 77). Die natürliche Zahl wird bei der *Zahl-mit-Zähler-Additionsstrategie* mit dem Zähler des Bruches addiert und dadurch eine fehlerhafte Umwandlung der gemischten Zahl in einen Bruch durchgeführt. Die *Ignorieren-des-Zählers-Strategie* beschreibt den Schülerfehler, dass beim Umwandeln eines gemischten Bruches nur die natürliche Zahl in Bruchschreibweise angegeben wird, ohne den Zähler zu addieren (Eichelmann et al., 2012). Bei der Umwandlung eines Bruchs in eine ganze Zahl wird durch die *Identität-Strategie* der Bruch  $\frac{a}{a}$  fälschlicherweise als  $a$  gedeutet (Eichelmann et al., 2012). Eine weiterer Schülerfehler ist die *Nenner-ist-Zahl-Strategie*, bei der der Nenner des Bruches  $\frac{1}{a}$  als die ganze Zahl gesehen wird (Eichelmann et al., 2012).

Fehler beim Vergleichen

Laut Eichelmann et al. (2012) zeigt sich beim Größenvergleich von Brüchen das Verständnis des Bruchzahlkonzepts besonders deutlich. In vielen der Fehlerstrategien werden Zähler und Nenner unabhängig voneinander betrachtet (Eichelmann et al., 2012; Padberg, 2012, S. 66). Das Vergleichen von gleichnamigen Brüchen ist nach Eichelmann et al. (2012) am problemlosesten. Die Fehler in Tabelle 2.4 beziehen sich auf das Vergleichen ungleichnamiger Brüche. Bei der *Kleinerer-Nenner-Strategie* konzentrieren sich die Schüler\*innen nur auf die Nenner der beiden Brüche und führen Größenvergleiche der Teilstücke durch, ohne die Anzahl (Zähler) zu beachten (Padberg, 2012, S.

66; Reinhold, 2019, S. 38). Die *Größerer-Nenner-Strategie* ist das Gegenteil der *Kleineren-Nenner-Strategie*, da hier der Bruch mit dem größeren Nenner als größer identifiziert wird (Padberg, 2012, S. 66; Reinhold, 2019, S. 38). Bei der Fehlerstrategie *Größerer-Zähler-Strategie* legen die Schüler\*innen ihr Hauptaugenmerk nur auf die Anzahl der Teilstücke, ohne deren Größe zu beachten (Padberg, 2012, S. 67). Reinhold (2019, S. 38) beschreibt die *Lücken-Strategie* (*gap thinking*) als Vergleich der beiden Brüche über die fehlenden Teilstücke zum Ganzen – ohne dass die Größe der Teilstücke Beachtung findet.

Tabelle 2.4: Typische Fehler beim Größenvergleich von Brüchen [nach Reinhold (2019, S. 38)]

Fehlerstrategie	Beispiel
Kleinerer-Nenner	$\frac{2}{5} > \frac{4}{7}$ , weil $5 < 7$
Größerer-Nenner	$\frac{2}{5} > \frac{3}{5}$ , weil $7 > 5$
Größerer-Zähler	$\frac{6}{7} > \frac{5}{5}$ , weil $6 > 5$
Lücken	$\frac{2}{3} > \frac{23}{25}$ , weil nur 1 Stück zum Ganzen fehlt

Eine Ursache für die Fehlerstrategie beim Größenvergleich ist laut Padberg (2012, S. 66), dass die Schüler\*innen nur über ein begrenztes Repertoire an Brüchen verfügen, um sich daran orientieren zu können. Für dieses Repertoire haben sie geeignete Größenvorstellungen, jedoch sind die übrigen Brüche *inhaltsleere Zeichenkombinationen* (Padberg, 2012, S. 66).

Das Erweitern ist die Grundlage der Addition und Subtraktion von Brüchen, da die Brüche damit gleichnamig gemacht werden (Eichelmann et al., 2012). Padberg (2012, S. 56) gibt an, dass das isolierte Erweitern in seltensten Fällen für Schwierigkeiten sorgt. Jedoch kritisieren Eichelmann et al. (2012), dass die isolierten Ergebnisse für das Erweitern von Brüchen für die korrekte Ausführung der Addition und Subtraktion wenig aussagekräftig sind. In Tabelle 2.5 sind zwei der erkannten Fehlerstrategien von Eichelmann et al. (2012) aufgelistet.

Fehler beim Erweitern

Tabelle 2.5: Typische Fehler beim Erweitern von Brüchen [nach Eichelmann u. a. (2012)]

Fehlerstrategie	Beispiel
Additives-Erweitern	$\frac{5}{3} = \frac{8}{6}$
Erweitern-über-Kreuz	$\frac{4}{10} + \frac{1}{15} = \frac{8+3}{30} = \frac{11}{30}$

Bei der Anwendung der *Additives-Erweitern-Strategie* werden Zähler und Nenner nicht mit derselben Zahl multipliziert, sondern fälschlicherweise addiert (Reinhold, 2019, S. 37). In manchen Fällen erweitern Schüler\*innen die Zähler kreuzweise und wenden dadurch die *Erweitern-über-Kreuz-Strategie* an (Eichelmann et al., 2012). Padberg (2012, S. 57) gibt noch weitere Strategien an, welche nur bei bestimmten Brüchen zum Erfolg führen, beispielsweise wird bei der Aufgabe  $\frac{1}{3} = \frac{2}{?}$  argumentiert, dass 1 addiert zu 1 2 ergibt und somit aus 3 addiert zu 3 der erweiterte Bruch  $\frac{2}{6}$  folgt. Im Falle des Verdoppelns stimmt dieser Zugang, jedoch stößt er bei  $\frac{2}{3} = \frac{?}{15}$  an seine Grenzen (Padberg, 2012, S. 57).

Fehler beim Kürzen

Auch die Fehler beim Kürzen treten in den meisten Fällen bei der Anwendung von Addition und Subtraktion auf (Reinhold, 2019, S. 37). Laut Reinhold (2019, S. 37) kann von der *Kürzungszahl-im-Ergebnis-Strategie* gesprochen werden, „wenn im gekürzten Ergebnis an der Stelle des Zählers oder des Nenners nicht das korrekte Ergebnis der Division, sondern die Zahl, die in der Aufgabenstellung als Kürzungszahl vorgegeben wird, steht“. Padberg (2012, S. 56) spricht in diesem Fall von einem sogenannte *Assoziationsfehler*. Bei der *Kürzen-von-Ziffern-Strategie* wird gesprochen, wenn beim Zähler und Nenner einzelne Ziffern gekürzt werden (Reinhold, 2019, S. 37). Die *Kürzen-In-Summen-Strategie* spricht das fehlerhafte Verhalten an, wenn das Kürzen innerhalb von Summen oder Differenzen angewandt wird (Eichelmann et al., 2012).

Tabelle 2.6: Typische Fehler beim Kürzen von Brüchen [nach Eichelmann u. a. (2012)]

Fehlerstrategie	Beispiel
Kürzungszahl-im-Ergebnis	$\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$
Kürzen-von-Ziffern	$\frac{26}{65} = \frac{2}{5}$
Kürzen-In-Summen	$\frac{4}{7} + \frac{5}{12} = \frac{1}{7} + \frac{5}{3}$

Eichelmann et al. (2012) sprechen auch Fehlstrategien, wie das unvollständige Kürzen oder das fehlende Kürzen nach Berechnungen an. Jedoch sollte zwischen der Beherrschung und der Durchführung der Technik unterschieden werden (Padberg, 2012, S. 57). Weiters gibt Padberg (2012, S. 57) an, dass das unvollständige Kürzen *nicht* eine mangelhafte Beherrschung der Technik sei, sondern nur das *Vergessen* der Überprüfung auf Kürzbarkeit. Weiters ist im Sinne des Äquivalenzklassenprinzips die mathematische Korrektheit auch von ungekürzten Endergebnissen gegeben und der Fehler liegt darin, dass die Aufgabenstellung (wie beispielsweise „... und kürze soweit möglich.“) nicht vollständig erfüllt wurde. Aus diesem Grund nimmt diese Arbeit Abstand davon, unvollständiges Kürzen als typischen Schülerfehler in Bezug auf das Bruchrechnen zu sehen.

Fehler bei der Addition

Bezüglich der Addition spricht Padberg (1986) von einem variierenden Schwierigkeitsgrad bezüglich der Aufgaben. Die Addition gleichnamiger Brüche wird durch die geringere Anforderung (kein Erweitern) und der Analogie zum vertrauten Bereich der natürlichen Zahlen (*quasikardinaler Aspekt*) häufig richtig gelöst (Padberg, 1986). Die Lösungsquoten nehmen für die Addition ungleichnamiger Brüche, die Addition einer natürlichen Zahl und einem Bruch und die Addition eines Bruches mit einer natürlichen Zahl sukzessive ab (Padberg, 2012, S. 80). In der Tabelle 2.7 sind drei der Fehlerstrategien von Eichelmann et al. (2012) und Padberg (1986) aufgelistet.

Tabelle 2.7: Typische Fehler beim Addieren von Brüchen [nach Eichelmann u. a. (2012)]

Fehlerstrategie	Beispiel
Zähler-und-Nenner-Addition	$\frac{5}{2} + \frac{2}{6} = \frac{5+2}{2+6} = \frac{7}{8}$
Multiplikation-statt-Addition	$\frac{5}{2} + \frac{2}{6} = \frac{5 \cdot 2}{2 \cdot 6} = \frac{10}{12}$
Addition-ursprünglicher-Zähler	$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4}$

Die getrennte Addition von Zählern und Nennern ist laut Eichelmann et al. (2012) eine der besonders häufigen Fehlerquellen und wird in der *Zähler-und-Nenner-Additionsstrategie* zusammengefasst. Diese Fehlvorstellung kann auf einer ungenügenden Bruchvorstellung basieren, da die Bruchzahl als zwei voneinander unabhängige natürliche Zahlen aufgefasst wird (Padberg, 1986). Die *Multiplikation-statt-Addition-Strategie* stellt das Ausweichen auf eine andere Rechenoperation dar, denn die Schüler\*innen multiplizieren die Zähler und Nenner (Eichelmann et al., 2012). Dieses Vorgehen kann noch variiert werden, indem der Hauptnenner, statt des Produktes der Nenner, verwendet wird (Eichelmann et al., 2012). Bei der Addition ungleichnamiger Brüche kommt es unter anderem auch zur *Addition-ursprünglicher-Zähler-Strategie*, bei welcher die Zähler bei korrekter Bildung des Hauptnenners in ihrer ursprünglichen Form bleiben (Padberg, 1986). Diese Strategie kann auf der Regelformulierung „erst gleichnamig machen, dann die Zähler addieren“ basieren (Padberg, 1986, S. 63).

Die Strategien bei der Subtraktion sind analog zu den Strategien der Addition (Eichelmann et al., 2012; Herden & Pallack, 2000; Padberg, 1986). Das Austauschen des Begriffs *Addition* mit dem Begriff *Subtraktion* und dem *Pluszeichen* mit dem *Minuszeichen* überführt die Strategien aus Tabelle 2.7 in den Bereich der Subtraktion. Jedoch sehen Schüler\*innen laut Herden & Pallack (2000) Additions- und Subtraktionsaufgaben als unterschiedliche Aufgabentypen, welche sie dementsprechend unterschiedlich bearbeiten. Fehler bei der Subtraktion

Im Gegensatz zu zur Addition oder Subtraktion von Brüchen ist die Multiplikation von gleichnamigen Brüchen vorstellungsmäßig nicht einfacher (Padberg, 1986, 2012, S. 114). Drei der Fehlerstrategien der Multiplikation sind in Tabelle 2.8 dargestellt. Fehler bei der Multiplikation

Tabelle 2.8: Typische Fehler beim Multiplizieren von Brüchen [nach Padberg (1986)]

Fehlerstrategie	Beispiel
Multiplikation-der-Zähler	$\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{5 \cdot 3}{7} = \frac{15}{7}$
Addition-der-Nenner	$\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{5 \cdot 3}{7+7} = \frac{15}{14}$
Multiplikation-zum-Nenner-und-Zähler	$4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 2}{4 \cdot 3}$

Ein Hauptfehler bei der Multiplikation gleichnamiger Brüche ist die *Multiplikation-der-Zähler-Strategie*, bei welcher der vertraute Rahmen der Addition oder Subtraktion auf die Multiplikation übertragen wird (Padberg, 1986). Bei dieser Strategie werden die Zähler miteinander multipliziert und der Nenner bleibt gleich (Herden & Pallack, 2000; Padberg, 2012, S. 115). Padberg (2012, S. 115) gibt an, dass dieser Fehler meist aus Flüchtigkeit begangen wird und nicht unbedingt systematisch ist. Die *Addition-der-Nenner-Strategie* ist bei der Multiplikation gleichnamiger Brüche eine häufigere Fehlerstrategie (Padberg, 2012, S. 115). Dabei werden die Zähler korrekterweise multipliziert, die Nenner jedoch addiert (Padberg, 2012, S. 115). Laut Padberg (1986) basiert der Fehler vermutlich auf der Verwechslung von  $b^2$  und  $2b$ . Die Multiplikation ungleichnamiger Brüche ist für die Schüler\*innen mit den wenigsten Schwierigkeiten verbunden (Padberg, 1986). Problematischer ist die Multiplikation von ganzen Zahlen und Brüchen, in diesem Bereich dominiert die *Multiplikation-zum-Nenner-und-Zähler-Strategie* (Padberg, 2012, S. 116). Schüler\*innen, welche diese Strategie nutzen, multiplizieren sowohl Zähler als auch Nenner mit der natürlichen Zahl. Padberg (2012, S. 117) erklärt diese Strategie durch die rein formale Betrachtung, ohne Rückgriff auf

adäquat ausgebildete Grundvorstellungen.

Fehler bei der Division

Wie bei der Multiplikation sind die Fälle *natürliche Zahl mal Bruch* und *Bruch mal natürliche Zahl* auch bei der Division problembehaftet (Padberg, 2012, S. 143). Ähnlich wie die *Multiplikation-der-Zähler-Strategie* ist die *Division-der-Zähler-Strategie* aus Tabelle 2.9.

Tabelle 2.9: Typische Fehler beim Dividieren von Brüchen [nach Padberg (1986)]

Fehlerstrategie	Beispiel
Division-der-Zähler	$\frac{6}{7} : \frac{3}{7} = \frac{6:3}{7} = \frac{2}{7}$
Multiplikation-statt-Division	$\frac{6}{7} : \frac{3}{7} = \frac{6}{7} \cdot \frac{3}{7}$
Multiplikation-zum-Nenner-und-Zähler	$\frac{2}{3} : 4 = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4}$

Hauptfehlerstrategien sind laut Padberg (2012, S. 144), dass systematische Multiplizieren statt Dividieren und somit die *Multiplikation-statt-Division-Strategie*. Vermutlich basiert dies auf Kehrwertfehlern oder ungeeigneten Vorstellungen des Kehrwertes von natürlichen Zahlen (Padberg, 1986). Die *Multiplikation-zum-Nenner-und-Zähler-Strategie* kommt auch bei der Division vor, hier werden natürliche Zahlen sowohl zum Nenner als auch zum Zähler multipliziert (Padberg, 2012, S. 144). Herden & Pallack (2000) geben mitunter an, dass Schüler\*innen fälschlicherweise bei der Division den Kehrwert des ersten Bruches bilden.

Fehler bei Dezimalbrüchen

Bei Dezimalbrüchen ist es besonders wichtig, den Zusammenhang zu den Brüchen zu betonen, da ansonsten die Schüler\*innen „*gemeine Brüche und Dezimalbrüche nicht für zwei verschiedene Schreibweisen derselben Zahl halten, sondern glauben, dass [sie] aus zwei verschiedenen Zahlenwelten stammen*“ (Padberg, 2012, S. 194). In der Tabelle 2.10 sind exemplarisch drei Fehler beim Umgang mit Dezimalbrüchen angeführt, für eine vertiefte Auseinandersetzung bietet sich das Werk von Padberg (2012) an.

Tabelle 2.10: Typische Fehler bei Dezimalbrüchen [nach Padberg (2012)]

Fehlerstrategie	Beispiel
Komma-trennt-Fehler	$2,3 \cdot 4,5 = 8,15$
Zuordnungsfehler	$0,4 = \frac{1}{4}$
Kein-Komma-Strategie	$\frac{2}{3} : 4 = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4}$

Schüler\*innen sehen bei der *Komma-trennt-Strategie* den Dezimalbruch als zwei natürliche – durch ein Komma getrennte – Zahlen (Padberg, 2012, S. 183). Dementsprechend wird mit den Zahlen auch getrennt operiert. Die *Zuordnungsfehler-Strategie* bezieht sich auf die Beziehung zwischen Dezimalbrüchen und gemeinen Brüchen. Padberg (2012, S. 174) spricht davon, dass Assoziationen, wie  $0,4 = \frac{1}{4}$ , Ursachen für Fehler sind. Beim Größenvergleich ist unter anderem die *Kein-Komma-Strategie* zu finden, da Schüler\*innen Dezimalbrüche ohne Berücksichtigung des Kommas als natürliche Zahlen betrachten (Padberg, 2012, S. 182).

### 2.3.2 Fehlende Grundvorstellungen

Bei der Zahlbereichserweiterung von den natürlichen Zahlen zu den rationalen Zahlen manifestieren sich bei vielen Schüler\*innen Vorstellungen zu Regeln, welche für den neuen Zahlbereich zwar nicht mehr gültig sind, aber dennoch angewandt werden (Schink, 2013, S. 12). Die Erklärung dieser Lernendenschwierigkeiten kann laut Schink (2013) und Padberg (2009) auf *Conceptual Change* Ansätzen beruhen. Solche Prozesse des Konzeptwechsels sind jedoch äußerst herausfordernd (Reinhold, 2019, S. 14). Um den Konzeptwechsel bei Schüler\*innen zu begünstigen, wurden laut Reinhold (2019, S. 14) vier Bedingungen formuliert:

Bedingungen für einen  
Konzeptwechsel

- *Unzufriedenheit mit etablierten Konzepten*: Schüler\*innen sollen selbst die Erfahrung machen, dass ihre bis dato tragfähigen Konzepte an Grenzen stoßen. Diese Bedingung löst damit einen kognitiven Konflikt aus.
- *Verständlichkeit der neuen Konzepte*: Die vielfältigen Möglichkeiten der neuen Konzepte sollen für die Schüler\*innen erkennbar und begreifbar sein.
- *Glaubwürdigkeit der neuen Konzepte*: Die Plausibilität der neuen Konzepte soll für die Schüler\*innen gegeben sein. Einerseits sollen die neuen Konzepte zur Lösbarkeit vormals unlösbarer Probleme beitragen und andererseits Anknüpfungspunkte an persönliche Erfahrungen bieten.
- *Einsetzbarkeit der neuen Konzepte in einem breiteren Kontext*: Durch die neuen Konzepte sollen die Schüler\*innen in der Lage sein, weitere und tiefgehendere Fragestellungen aufzuwerfen und zu beantworten.

Die von Reinhold (2019, S. 14) beschriebenen Kriterien machen deutlich, dass die Bruchrechnung nicht aus einer rein arithmetischen Perspektive betrachtet werden sollte. Dennoch ist basierend auf Kapitel 2.3.1 ersichtlich, dass trotz intensiver Behandlung der Bruchzahlen dennoch Fehlerstrategien gebildet werden. Fehlende Grundvorstellungen sind grundlegende Ursachen für solche Fehlerstrategien (Wartha & Güse, 2009).

Bezüglich Grundvorstellungen können zwei Aufgabentypen unterschieden werden: Formale Rechenaufgaben mit Rückgriff auf das Kalkül und kontextualisierte Aufgaben, welche zur Lösung die Aktivierung von Grundvorstellungen benötigen (Reinhold, 2019, S. 39). Als Fortführung sprechen Padberg & Wartha (2017, S. 2) von der Unterscheidung des *Könnens* eines mathematischen Lerngegenstandes und einem tiefgehenden *Verständnis* dieses Lerngegenstandes. Die Autoren führen aus, dass von *Verstehen* gesprochen werden kann, wenn Grundvorstellungen aktiviert werden. Weiters wird ein Inhalt höchstens „*gekonnt*“, wenn eine Übersetzung in eine andere Darstellungsebene nicht möglich ist (Padberg & Wartha, 2017, S. 2). Laut Reinhold (2019, S. 39) ist es plausibel anzunehmen, „*dass ein in dieser Art definiertes Verständnis mathematischer Inhalte notwendige Voraussetzung für die erfolgreiche Bearbeitung von Modellierungsaufgaben und Aufgaben mit Repräsentationswechseln sowie für mathematisches Argumentieren und Kommunizieren darstellen kann*“. Die Problematik in diesem Fall bezieht sich darauf, dass die Überprüfung tatsächlich vorhandener Grundvorstellungen äußerst komplex ist (Reinhold, 2019, S. 39).

Verstehen und Können

Bezugnehmend auf den Unterschied zwischen *Können* und *Verstehen* wird deutlich, dass ein rein auf der Arithmetik beruhender Unterricht nicht ausreicht, da keine geeigneten Grundvorstellungen aufgebaut werden (Barash & Klein, 1996; Reinhold, 2019, S. 39). Ohne adäquate Grundvorstellungen könnten Schüler\*innen numerische Misskonzeptionen (*numeric misconceptions*) ausbilden, wie

numerische  
Misskon-  
zeptionen

beispielsweise die Vorstellung, dass Multiplizieren immer vergrößert und Dividieren immer verkleinert (Bell et al., 1989). Schüler\*innen halten an diesen Aussagen auch dann fest, wenn sie zuvor arithmetische Aufgaben korrekt gelöst haben (Barash & Klein, 1996; Reinhold, 2019, S. 39). Daraus schließen die Autoren, dass Schüler\*innen das formale Rechnen und das konzeptuelle Verständnis der beiden Operationen Multiplikation und Division als voneinander losgelöste Lerngegenstände auffassen.

Umbruch von den natürlichen Zahlen	Neben dieser Vorstellung hält sich auch die Vorstellung der <i>Multiplikation als mehrfache Addition</i> , wobei diese im Fall Bruch mal Bruch nicht tragfähig ist (Bell et al., 1989; Reinhold, 2019, S. 40). Solche Vorstellungen basieren meist auf bekannten Verfahren und Konzepten der natürlichen Zahlen. Durch die Grundvorstellungsumbrüche der rationalen Zahlen gegenüber den natürlichen Zahlen macht das Konstrukt Zahl ontologische und epistemologische Veränderungen durch (Padberg, 2012, S. 45; Reinhold, 2019, S. 35). Ein Beispiel hierfür ist die Kardinalität der natürlichen Zahlen, die bei den rationalen Zahlen als Quasikardinalität in den Grundvorstellungen verwendet wird (Noll, 2020). Laut Winter (1999, S. 19) scheint nichts so „ <i>unverrückbar festzustehen, daß Zahlen zum Zählen da sind und Zählresultate fixieren</i> “. Obwohl eine Bruchzahl auch im Sinne des Kardinalzahlaspekts aufgefasst werden kann, muss sich die Vorstellung der Lernenden verändern, denn eine Bruchzahl beschreibt nicht die Anzahl von Elementen, sondern Anteile (Noll, 2020, S. 34). Neben Änderungen beim Zahlbegriff müssen die Schüler*innen auch bei der Zahldarstellung grundlegende Vorstellungsänderungen vollziehen (Padberg, 2012, S. 45).
formale Fehlerstrategien vs. Grundvorstellungen	Bezogen auf die Fehlerstrategien aus Kapitel 2.3.1 basiert ein Großteil der Fehler auf der fehlenden Grundvorstellung der Brüche, da die meisten Schüler*innen nicht die Bruchzahl sehen, sondern zwei voneinander unabhängige natürliche Zahlen (Eichelmann et al., 2012; Padberg, 1986, 2012, S: 66). Zusätzlich sind die Grundvorstellungen <i>Teil eines Ganzen</i> , <i>Ergebnis einer Division</i> oder <i>Verhältnis</i> bei den Bruchzahlen neu und in vielen Fällen weder verinnerlicht noch ausgeprägt (Noll, 2020, S. 35). Es gibt jedoch auch rein formale Fehlerstrategien, wie die <i>Kleinere-Nenner-Strategie</i> , welche durch Grundvorstellungen eher unzureichend erklärt werden (Reinhold, 2019, S. 40). Diese formale Aufgaben sollten auch ohne anschauliche Grundvorstellung auf rein syntaktischer Ebene erfolgreich gelingen (Padberg & Wartha, 2017; Reinhold, 2019, S. 40). Jedoch fügen Bell et al. (1989) und Barash & Klein (1996) an, dass das syntaktische Wissen um Regeln, mentale Modelle wie Grundvorstellungen nur marginal beeinflusst. Das Arbeiten mit Fehlerbeispielen zum Aufbau von Abgrenzungswissen, im Sinne des Geltungsbereichs der Regeln, ist empirisch bestätigt und unterstützt vor allem leistungsschwache Schüler*innen (Padberg & Wartha, 2017, S. 5).
internationale Schwierigkeiten	Wie die Arbeit von Eichelmann et al. (2012) zeigt, treten die typischen Fehler in der Bruchrechnung international ähnlich auf. Reinhold (2019, S. 41) folgert daraus, dass die Fehler eher als <i>domänenspezifische Schwierigkeitsfaktoren</i> bezeichnet werden können, da sie unabhängig von curricularen Voraussetzungen oder dem Alter der Schüler*innen auftreten können.



## Kapitel 3

# Prozentzahlen und Prozentrechnung

Das folgende Kapitel behandelt die Prozentzahlen und die Prozentrechnung. Anders als bei den Bruchzahlen weisen die Prozentzahlen bereits einen starken Alltagsbezug auf (Gudladt, 2021, S. 5). Aus diesem Grund wird die Relevanz der Prozentrechnung nicht explizit aufgezeigt. Das Kapitel ist wiederum in die formalen Aspekte und adäquate Grundvorstellungen der Prozentrechnung, gefolgt von der schulischen Einführung sowie den typischen Schülerfehlern, aufgeteilt.

Der historische Verlauf der Prozentrechnung kann nicht exakt dargestellt werden, da in zahlreichen geschichtlicher Exkurs Epochen Vorläufer der Prozentrechnung entstanden (Gudladt, 2021, S. 6). Eine der ersten Zivilisationen, welche mit Verhältnissen und somit im weitesten Sinne mit Prozenten rechnete, waren 2100 v. Chr. die Babylonier (Gudladt, 2021, S. 6). Im dritten Jahrhundert vor Christus lassen sich in Indien Gesetzestexte zum Glücksspiel finden, welche auf Prozente referenzieren (Gudladt, 2021, S. 6). Laut R. Berger (1989) sind im römischen Steuerrecht unter Kaiser Augustus bereits implizite Ansätze der Prozentrechnung zu finden. Laut Gudladt (2021, S. 6) geht das heutige Verständnis der Prozentrechnung auf italienische Handelsleute aus dem 15. Jahrhundert zurück. Im weiteren geschichtlichen Verlauf wurde der Prozentbegriff vom reinen Handel losgelöst und zu einem allgemeineren Gegenstand der Mathematik entwickelt (Gudladt, 2021, S. 6).

Das Symbol der Prozentrechnung entwickelte sich gleichsam in der Vergangenheit (Gudladt, 2021, S. 6). Um 1650 lassen sich die ersten Abwandlungen des Symbols der Prozentrechnung finden (Gudladt, 2021, S. 6). Einige Entwicklungsschritte führen Gudladt (2021, S. 6) und R. Berger (1989, S. 8) durch *per ceto*, *pceto*,  $pc^\circ$  oder  $p0/0$  an. In der Mitte des 19. Jahrhunderts wurde auf die Angabe *per* verzichtet und der Bruch  $\frac{0}{0}$  entwickelte sich zum Prozentsymbol % (R. Berger, 1989, S. 8). An der Entwicklung des Prozentzeichens von zwei Worten, welche eine konkrete Zahlangabe beinhalten (*per cento*), zu einem mathematischen Symbol (%) ist die Veränderung der Prozente als rein situatives Verständnis hin zu einem vielfältigeren Verständnis ersichtlich (Gudladt, 2021, S. 6). Entwicklung des Prozentsymbols

### 3.1 Aspekte der Prozentzahlen

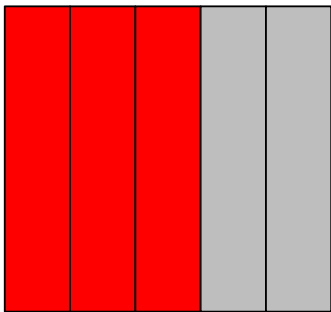
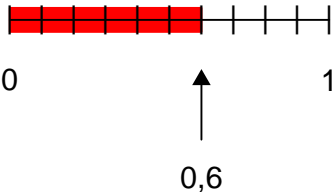
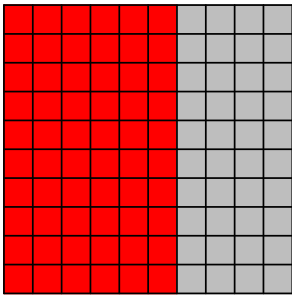
Definitionschaos

Das Prozentrechnen ist aus fachwissenschaftlicher Sicht nicht besonders interessant, da es sich um einen Sonderfall der Bruchrechnung (vgl. Kapitel 2) handelt (Gudladt, 2021, S. 5). Die lexikalische Definition der Prozentrechnung als ein Zusatz zu Zahlenangaben mit der Referenzzahl 100 ist eindeutig, jedoch treten laut Gudladt (2021, S. 7) bei der mathematischen oder fachdidaktischen Definition des Prozentbegriffs Hürden auf. Einerseits basiert diese Schwierigkeit auf den vielfältigen Sachsituationen der Prozentrechnung und andererseits lässt sich diese Thematik nicht eindeutig einem mathematischen Teilbereich zuordnen (R. Berger, 1989, S. 10; Gudladt, 2021, S. 7; Pöhler, 2018, S. 11). Laut R. Berger (1989) herrscht bei dieser Thematik sogar ein „*Definitionschaos*“. Die folgende Darstellung folgt in groben Zügen der Arbeit von Gudladt (2021) und stellt sowohl die verschiedenen mathematischen Aspekte als auch die Begriffe der Prozentrechnung in den Vordergrund.

Bezugsfeld Bruchrechnung

Die Prozentrechnung ist aus fachwissenschaftlicher Sicht zwar „*recht uninteressant*“, jedoch spielen mehrere Aspekte eine Rolle (Gudladt, 2021, S. 8). So stellt Gudladt (2021, S. 8) einen Bezug zwischen der Prozentrechnung und den Feldern der Bruchrechnung, Schlussrechnung und Proportionalität her. Die Prozentrechnung ist ein Spezialfall der Bruchrechnung (Feijs et al., 2008, S. 89; Gudladt, 2021, S. 8; Pöhler, 2018, S. 11), dementsprechend ist auch die Vorstellung hinter Prozentzahlen ähnlich zu Brüchen oder Dezimalbrüchen. In der Tabelle 3.1 sind die Ähnlichkeiten nach Wartha & Wittmann (2009, S. 95) dargestellt.

Tabelle 3.1: Prozentzahlen in Bezug zu Bruchzahlen [nach Wartha und Wittmann (2009, S. 95)]

Bruchschreibweise	Dezimalschreibweise	Prozentschreibweise
$\frac{3}{5}$ bedeutet: Ein Streifen wird in 5 gleich große Teilstücke geteilt und 3 davon werden betrachtet.	0,6 bedeutet: Der Zahlenstrahl von 0 bis 1 wird betrachtet und von den 10 gleich großen Teilstücken nimmt man 6 Stück.	60% bedeutet: Ein Rechteck wird in 100 gleich große Kästchen aufgeteilt und davon werden 60 betrachtet.
		

In der Prozentrechnung wird über den Nenner 100 ein Standardrepräsentant einer Äquivalenzklasse definiert (Gudladt, 2021, S. 8). Beispielsweise enthält diese Äquivalenzklasse alle Brüche oder alle

Anteile, die dem Bruch  $\frac{15}{100}$  oder der Zahl 0,15 entsprechen (R. Berger, 1989, S. 30). Der Vorteil dieser Darstellung liegt laut Gudladt (2021, S. 8) auf der einfachen Umformbarkeit von gemeinen Brüchen zu Dezimalbrüchen. Weiters führt er an, dass durch den gemeinsamen Nenner und unter der Bedingung eines gemeinsamen Bezugswerts die Rechenoperationen Addition und Subtraktion einfach sind.

Ein weiteres Bezugsfeld stellt laut R. Berger (1989, S. 20) die Schlussrechnung dar, welche ebenfalls kein eigenständiges mathematisches Themengebiet ist. Äquivalent zur Schlussrechnung ist die Dreisatzrechnung (Gudladt, 2021, S. 9). In vielen Fällen wirkt sich die Schluss- oder Dreisatzrechnung als „*Proportions-Umgehungs-Strategie*“ bei den Schüler\*innen aus (Gudladt, 2021, S. 9).

Bezugsfeld  
Schluss-  
rechnung

Prozentzahlen bieten einen standardisierten Weg, um Proportionalitäten zu beschreiben (Feijs et al., 2008, S. 89). Laut Gudladt (2021, S. 9) ist die Proportionalität (und somit auch die Dreisatzrechnung) „*eine Abbildung eines Größenbereichs in einen anderen Größenbereich über die Menger der positiven rationalen Zahlen,  $\mathbb{Q}^+$ , durch eine Abbildungsvorschrift*“. Bezogen auf die Prozentrechnung ist einer der Größenbereiche immer eine Prozentangabe (Gudladt, 2021, S. 9). Die entscheidenden mathematischen Bedingungen für die Abbildungsvorschrift  $\phi$  für die Prozentrechnung fasst Gudladt (2021, S. 9) wie folgt zusammen:

Bezugsfeld  
Proportio-  
nalität

- Die *Vervielfachungseigenschaft* ( $r \in \mathbb{R} : \phi(rA) = r\phi(A)$ ) bedeutet für die Prozentrechnung, dass das  $r$ -fache des Prozentwerts dem  $r$ -fachen Wert der zugeordneten Größe entspricht.
- Mathematisch besagt die *Isotonie*, wenn  $A < B$ , dann  $\phi(A) < \phi(B)$ . Bezogen auf die Prozentrechnung gilt: Wenn ein prozentualer Wert kleiner als ein anderer ist, ist auch seine zugeordnete Größe kleiner.
- Die Addition zweier Prozentwerte entspricht der Addition der jeweils zugeordneten Werte. Dies basiert auf der *Additionsregel* ( $\phi(A + B) = \phi(A) + \phi(B)$ ).
- Die *Gleichheit der Verhältnisse* ist mathematisch  $\phi(A) : \phi(B) = A : B$ . Dementsprechend ist das Verhältnis zweier prozentualer Angaben gleich dem Verhältnis der beiden zugeordneten Werte.

Diese mathematischen Bedingungen korrespondieren zu den beschriebenen Eigenschaften der Proportionalität von Kleine & Jordan (2007). Der Forderung von Kleine & Jordan (2007), dass Proportionalitäten erst verstanden werden können, wenn die strukturerhaltende Abbildung zwischen zwei Größenbereichen begriffen wurde, ist damit Genüge getan. Weiters merken die Autoren an, dass die Lösungsstrategien beim Rechnen mit Proportionalitäten und in der Prozentrechnung analog sind.

Sowohl Gudladt (2021, S. 10) als auch Pöhler (2018, S. 16) sprechen von drei zentralen formalbezogenen Konzepten bei den Prozentzahlen beziehungsweise der Prozentrechnung. Der *Grundwert* wird je nach Situation zur Beschreibung des Ganzen (Prozente als Anteile) als eine zu vergleichende Größe (bei Vergleichssituationen) oder der ursprünglichen Werte einer Größe (bei Veränderungssituationen) verwendet (R. Berger, 1989, S. 11; Pöhler, 2018, S. 16). Unabhängig von der jeweiligen Anwendungssituation wird der Grundwert mit 100% veranschlagt (Gudladt, 2021, S. 10; Pöhler, 2018, S. 16). Bei speziellen Anwendungen mit Prozenten sind Konventionen fixiert, was als Grundwert zu betrachten ist (Pöhler, 2018, S. 16). Die Bedeutung des *Prozentwerts* variiert – ähnlich wie beim *Grundwert* – je nach Situation:

Formalbezogene  
Grundbegriffe

- *Prozente als Anteile*: Der *Prozentwert* beschreibt eine Teilmenge des Grundwertes (R. Berger, 1989, S. 11; Pöhler, 2018, S. 17).

- *Prozente als Verhältnisse*: Der *Prozentwert* gibt den neuen Wert an (R. Berger, 1989, S. 11). Dabei kann der *Prozentwert* ein Vielfaches des *Grundwertes* darstellen (Pöhler, 2018, S. 17). Weiters führt R. Berger (1989, S. 11) an, dass die Mengen, die dem Grundwert und dem Prozentwert zugrunde liegen, elementfremd sind. Deshalb entscheidet die eingenommene Perspektive, welche Menge als *Grundwert*- und welche als *Prozentwertmenge* angesehen wird.

Der *Prozentsatz* gibt das „*Verhältnis von zwei Größen in Form eines Hundertstelbruchs an*“ (Gudladt, 2021, S. 10). Je nach Interpretation kann der ganze Bruch  $\frac{p}{100}$  oder nur der Zähler  $p$  als *Prozentsatz* gemeint sein (Gudladt, 2021, S. 10; Pöhler, 2018, S. 17). Aber auch die Notation  $p\%$  der Alltagssprache wird häufig als *Prozentsatz* benannt (Pöhler, 2018, S. 17). Dabei gibt Pöhler (2018, S. 17) an, dass die Zahl vor dem Prozentzeichen beziehungsweise der Zähler des Hundertstelbruchs als *Prozentzahl* definiert wird.

## 3.2 Grundvorstellungen

Grundvorstellungen allgemein

Grundvorstellungen beschreiben laut vom Hofe (1995, S. 98) „*Elemente der Vermittlung bzw. [...] Objekte des Übergangs zwischen der Welt der Mathematik und der individuellen Begriffsbildung des Lernenden*“. Dabei handelt es sich bei den Grundvorstellungen um mentale Repräsentationen mathematischer Objekte und Sachverhalte (Griesel et al., 2019). Grundvorstellungen präzisieren damit dem im allgemeinen Sprachgebrauch gängigen Begriff des *intuitiven Verständnisses* (Griesel et al., 2019). Eine umfassendere Darstellung des Konzepts der Grundvorstellungen ist im Kapitel 2.2 dargestellt.

unterschiedliche Perspektiven

Ähnlich wie bei den Bruchzahlen (vgl. Kapitel 2.2.1) können auch Prozente und die Prozentrechnung aus verschiedenen Perspektiven betrachtet werden. Im Folgenden werden die Grundvorstellungen der *Prozente als Zahlen*, *als Anteile* und *als Verhältnisse* dargestellt. In der Prozentrechnung werden die Grundvorstellungen *Von-Hundert-Vorstellung*, *Hundertstel- oder Prozentoperator-Vorstellung* und *Bedarfseinheitenvorstellung oder quasikardinale Vorstellung* näher beleuchtet.

### 3.2.1 Grundvorstellungen zu Prozenten

Prozente als Zahlen

Bezüglich des Prozentbegriffs sind einfache Übersetzungen des Prozentzeichens verbreitet, in denen Prozente als *Hundertstel* oder *von Hundert* erklärt werden (Pöhler, 2018, S. 13). Die Grundvorstellung der *Prozente als Zahlen* ist auch in vielen Schulbüchern weit verbreitet (Pöhler, 2018, S. 13). Weiters gibt Pöhler (2018, S. 13) an, dass diese Grundvorstellung die Gleichsetzung einer Prozentangabe mit einem Bruch oder einer Dezimalzahl erlaubt. So gilt

$$75\% = \frac{75}{100} = 0,75.$$

Dabei ist darauf zu achten, dass bei der Übersetzung von Prozentzahlen in Brüche die Berücksichtigung des Ganzen (Grundwert, 100%) nicht außer Acht gelassen wird (Pöhler, 2018, S. 13). Dementsprechend muss bei Prozentangaben die Bezugsgröße immer angegeben werden. Ausnahmen dieser Regel sind laut Pöhler (2018, S. 13) beispielsweise Berechnungen im Wahrscheinlichkeitskontext.

Pöhler (2018, S. 14) versteht unter der Grundvorstellung *Prozente als Anteile* einen Vergleich zweier Mengen, wobei eine Menge eine Teilmenge der anderen Menge bildet. Laut der Autorin liegt dadurch eine „statische, mengentheoretische Inklusion“ vor. Bezugnehmend auf die Grundvorstellungen der Bruchzahlen (vgl. Kapitel 2.2.1) hat die Grundvorstellung *Prozente als Anteile* eine große Analogie zu *Anteil eines Ganzen*. Dadurch können zunächst aber keine Prozentsätze, die größer als 100% sind, auftreten (Pöhler, 2018, S. 14). Prozentstreifen wirken sich bei dieser Grundvorstellung besonders unterstützend aus, da sie flexible mentale Arithmetikprozesse mit Prozenten auf einfacher Basis erlauben (Feijs et al., 2008, S. 93). In Abb. 3.1 sind einerseits zwei Prozentstreifen (unten) dargestellt, welche laut Feijs et al. (2008, S. 93) durch die dargestellte Fläche sowohl das Ganze als auch den Anteil für die Schüler\*innen besonders deutlich machen. Andererseits ist in 3.1 auch die abstraktere Variante in Form eines Zahlenstrahls (oben) dargestellt, welche sich laut Feijs et al. (2008, S. 93) besonders für Prozentrechenaufgaben über 100% eignet.

Prozente als Anteile

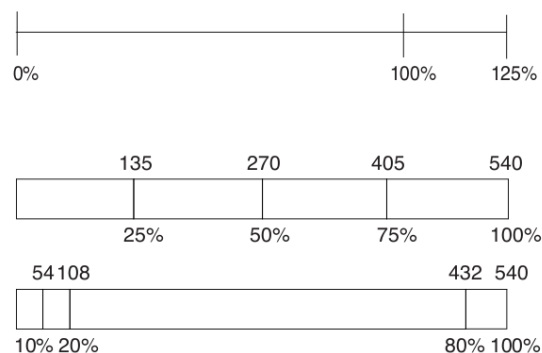


Abbildung 3.1: Prozentstreifen [entnommen aus Feijs u. a. (2008, S. 93)]

Die Grundvorstellung *Prozente als Anteil* bleibt laut Pöhler (2018, S. 15) auch in der Wahrscheinlichkeitsrechnung tragfähig, vor allem im Hinblick auf Laplace-Wahrscheinlichkeiten. Da die Anteile als Teile eines Ganzen interpretiert werden können und sich somit die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Ereignisses aus der Anzahl der günstigen Ereignisse durch die Anzahl aller möglichen Ereignisse ergibt (Pöhler, 2018, S. 15).

Die Grundvorstellung *Prozente als Verhältnisse* ermöglicht den Vergleich zweier Mengen (Pöhler, 2018, S. 15). Diese Grundvorstellung unterscheidet *Vergleichssituationen* und *Veränderungssituationen* (Pöhler, 2018). Bei *Vergleichssituationen* kann ein statischer Vergleich von Anteilen durchgeführt werden, wobei sich die Anteile auf verschiedene Bezugsgrößen beziehen (R. Berger, 1989, S. 16). Eine solche Situation ist charakterisiert durch die Beziehung zwischen zwei elementfremden Mengen zu einem Zeitpunkt (Pöhler, 2018, S. 15). Klassische Aufgaben für *Vergleichssituationen* sind Aufgaben, in denen es um den Vergleich von Menge  $A$  mit Menge  $B$  oder um den Unterschied von  $p\%$  zwischen den Mengen geht (Pöhler, 2018, S. 16). *Veränderungssituationen* fokussieren sich im Gegensatz dazu auf prozentuelle Veränderungen von Bezugsgrößen unter zeitlich-räumlichem Einfluss (R. Berger, 1989, S. 17; Pöhler, 2018, S. 16). Laut Pöhler (2018, S. 16) kann eine Differenzierung zwischen Situationsmustern vorgenommen werden, bei denen ein Vergleich der Größenordnung stattfindet (Veränderung auf  $p\%$ ) und Situationsmustern, bei denen die Höhe der Veränderung fokussiert wird (Veränderung um  $p\%$ ).

Prozente als Verhältnisse

### 3.2.2 Grundvorstellungen zur Prozentrechnung

Von-Hundert-  
Vorstellung

Die *Von-Hundert-Vorstellung* geht auf die ursprüngliche Wortbedeutung des %-Zeichens, im Sinne von *pro hundred*, zurück (Hafner, 2012, S. 37). Der Grundwert wird dabei in 100 gleich große Teile aufgeteilt (Buchholtz et al., 2016; Hafner, 2012, S. 37). Unter Verwendung des Prozentsatzes  $p\%$  werden  $p$  Teilstücke vom Grundwert betrachtet (Buchholtz et al., 2016; Hafner, 2012, S. 37). In Abb. 3.2 ist das Vorgehen für 60% dargestellt.

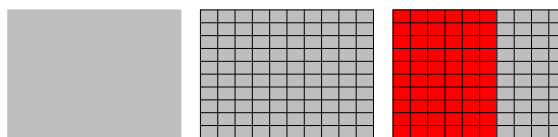


Abbildung 3.2: Von-Hundert-Vorstellung

Der gegebene Grundwert wurde im ersten Schritt in 100 gleich große Teilflächen aufgeteilt. Im nächsten Schritt wurden 60 dieser Teilstücke markiert, da nach 60% des Grundwertes gefragt wurde. Laut Hafner (2012, S. 38) liegt dieser Grundvorstellung die Verhältnis-Vorstellung von Brüchen zugrunde.

Hundertstel-  
Vorstellung

Bei der *Hundertstel-* oder *Prozentoperator-Vorstellung* wird die Angabe von  $p\%$  als Hundertstel-Bruch  $\frac{p}{100}$  und somit als multiplikativer Operator interpretiert (Buchholtz et al., 2016). In diesem Sinne korrespondiert die Grundvorstellung mit dem Operatorkonzept der Bruchrechnung. Der Prozentwert errechnet sich für einen festen Prozentsatz durch die Multiplikation der Bezugsgröße (Grundwert) mit dem konstanten Hundertstel-Bruch (Buchholtz et al., 2016; Hafner, 2012, S. 38). Laut Buchholtz et al. (2016) ist der konstante Hundertstel-Bruch eine Proportionalitätskonstante. Dadurch wird eine „*proportionale Zuordnung zwischen dem Größenbereich der Bezugsgröße und dem Größenbereich der Prozentwerte geschaffen*“ (Buchholtz et al., 2016, S. 38).

Bedarfseinheiten-  
Vorstellung

Die *Bedarfseinheitenvorstellung* oder *quasikardinale Vorstellung* hat ihren Fokus auf die Zuordnungen zwischen Größenbereichen gelegt (Hafner, 2012, S. 38). Durch die *Bedarfseinheiten-Vorstellung* des Prozentbegriffs wird laut Buchholtz et al. (2016) und Hafner (2012, S. 38) ein fiktiver Größenbereich – die Menge aller positiven Brüche mit der Benennung % – geschaffen. Bei dieser Vorstellung entspricht der Grundwert 100% und dementsprechend setzt er sich aus 100 1%-Teilen zusammen (Buchholtz et al., 2016). „*Die Angabe  $p\%$  vom Ganzen entspricht hier im Sinne der Proportionalitätsüberlegungen also  $p$ -mal dem hundertsten Teil des Ganzen*“ (Buchholtz et al., 2016, S. 39).

## 3.3 Prozentrechnen in der Schule

Alltagsrelevanz

Greefrath (2018, S. 147) ordnet die Zinsrechnung dem Kontext der proportionalen Zuordnungen ein und merkt an, dass die Prozentrechnung ein klassischer Sachkontext des anwendungsbezogenen Mathematikunterrichts ist. Neben Greefrath (2018, S. 147) sehen unter anderem Gudladt (2021, S. 7) und Pöhler (2018, S. 9) einen großen Alltagsbezug der Prozentzahlen und -rechnung. Neben den Einsatzmöglichkeiten in der Wirtschaft leistet die Prozentrechnung auch in anderen Disziplinen respektive Unterrichtsfächern Hilfestellung für den Lernerfolg (Gudladt, 2021, S. 7). Als Beispiel führt Gudladt (2021, S. 7) den korrekten Umgang mit Reaktionsgleichungen in Chemie an. Weitere

Anwendungsbeispiele können laut Gudladt (2021, S. 7) und Pöhler (2018, S. 9) Rabattangebote, statistische Angaben in Medien, Bankgeschäfte (Zinsen) oder relative Vergleiche in unterschiedlichen Bereichen (Trefferquote im Sport etc.) sein.

Basierend auf den Vorstellungen der Prozentzahlen ergeben sich Aufgaben, um die fehlende Größe Grundwert, Prozentwert oder Prozentsatz zu bestimmen (Hafner, 2012, S. 38). Hafner (2012, S. 38) unterscheidet die drei Grundaufgabe (*G1*) *Prozentwert gesucht*, (*G2*) *Grundwert gesucht* und (*G3*) *Prozentsatz gesucht*. Pöhler (2018, S. 20–21) erweitert die drei basalen Grundaufgaben um weitere acht Variationen von Aufgabentypen. In dieser Arbeit werden jedoch nur die drei klassischen Aufgaben beschrieben. Die drei Grundaufgaben sind dadurch definiert, dass zwei Angaben gegeben sind und die dritte gesucht wird (Gudladt, 2021, S. 13). Die drei Grundaufgaben der Prozentrechnung sind äquivalent zu den Konstellationen der Bruchrechnung laut Schink (2013, S. 56–58) und Padberg & Wartha (2017, S. 34–36) und werden im Folgenden nur kurz umrissen. Die Suche nach dem Prozentwert (*G1*) ist historisch gesehen die erste Grundaufgabe der Prozentrechnung und die Basis der beiden anderen Grundaufgaben (Gudladt, 2021, S. 13; Pöhler, 2018, S. 20). Durch die Angabe von Grundwert und Prozentsatz soll der Prozentwert berechnet werden. In dieser Grundaufgabe ist der operationale Gebrauch von Prozenten verankert (Pöhler, 2018, S. 20) und die Aufgabenstellung unterliegt einer funktionalen Betrachtung (Gudladt, 2021, S. 13). Das Berechnen des Grundwerts (*G2*) auf Basis des Prozentwerts und Prozentsatzes ist laut Gudladt (2021, S. 13) und Pöhler (2018, S. 21) aus Sicht des Alltagsbezugs kritisch zu sehen, da er einer fiktiven mathematischen Kreation gleichzusetzen ist, welcher die Triade der Grundaufgaben vervollständigen soll. Bei der Suche nach dem Prozentsatz (*G3*) dominiert in den häufigsten Fällen die Vorstellung von Prozenten als Anteile oder Verhältnisse (Pöhler, 2018, S. 21).

Zur Lösung der Grundaufgaben stehen unterschiedliche Lösungsstrategien zur Verfügung, wie beispielsweise die Operatormethode, der klassische oder individuelle Dreisatz, die Bruch- oder Verhältnisgleichung oder die Prozentformeln (Hafner, 2012, S. 38–40). Die Pluralität der Lösungsverfahren basiert laut Pöhler (2018, S. 23) auf den vielfältigen Grundvorstellungen zum Prozentbegriff und der Prozentrechnung. Die folgenden Beschreibungen folgen vor allem den Arbeiten von Gudladt (2021), Hafner (2012) und Pöhler (2018).

Da die Prozentrechnung viele Analogien zur Bruchrechnung aufweist, greift die *Operatormethode* die Verzahnung der Prozent- mit der Bruchrechnung auf (Gudladt, 2021, S. 16). Wenn in der Bruchrechnung bereits das Operatorkonzept (Wartha & Güse, 2009) verwendet wird, kann dies auf einfachem Weg auf die Prozentrechnung übertragen werden (Gudladt, 2021, S. 16). Bei der *Operatormethode* wird der Prozentsatz  $p\%$  erstens als Hundertstelbruch und zweitens als multiplikative Rechenanweisung verstanden (Hafner, 2012, S. 38). Für das Beispiel mit Grundwert  $G = 210\text{€}$  und  $p\% = 15\%$  ist die Berechnung des Prozentwerts  $P$  laut *Operatormethode*

$$210 \cdot \frac{15}{100} P$$

$$P = 210 \cdot \frac{15}{100} = 31,50$$

(Hafner, 2012, S. 38). Bei der Operatormethode wird die Prozentangabe demnach als Proportionalitätsfaktor gebraucht (Kleine & Jordan, 2007; Pöhler, 2018, S. 23). Mithilfe der Operatormethode

kann für alle der drei Grundaufgaben ein passendes Lösungsschema gefunden werden (Gudladt, 2021, S. 16). Weiters führt Gudladt (2021, S. 16) an, dass bei dieser Methode die Verbindung zwischen Prozentangaben und Dezimalzahlen ausgenutzt werden kann. Kritisch fügt Gudladt (2021, S. 17) die starke algorithmische Basis des Verfahrens an, da dies zu mechanischer Verwendung bei Schüler\*innen führen kann.

Dreisatz - Schulsrechnung

Die Lösungsstrategie des *Dreisatzes* basiert auf der Schlussrechnung (Gudladt, 2021, S. 15), wobei der Terminus *Dreisatz* eher in Deutschland und der Begriff *Schlussrechnung* eher in Österreich verbreitet ist. Laut Hafner (2012, S. 39) wird beim klassischen Dreisatzverfahren eine Zuordnung zwischen „dem fiktiven bürgerlichen Größenbereich der Prozente und einem bürgerlichen Größenbereich“ festgelegt. Das Vorgehen des *Dreisatz* besteht darin, dass zuerst der Wert für ein Prozent berechnet wird, indem beide Größen mit derselben Zahl dividiert werden (Gudladt, 2021, S. 15). Im nächsten Schritt wird dieser Wert mit der Prozentangabe multipliziert (Gudladt, 2021, S. 15). Hafner (2012, S. 39) berechnet sich der klassische Dreisatz (Grundwert  $G = 210\text{€}$  und  $p\% = 15\%$ ) wie folgt:

$$\begin{aligned} 100\% &\hat{=} 210\text{€} \\ 1\% &\hat{=} 2,10\text{€} \\ 15\% &\hat{=} 31,50\text{€} \end{aligned}$$

Pöhler (2018, S. 24) verwendet statt *Dreisatz* den Ausdruck *proportionales Hoch- und Runterrechnen*, um die potenzielle Vielfalt der Verwendung zu betonen. Unter anderem spricht sie davon, dass auch ein größerer gemeinsamer Teiler die geeignete Einheit von Ausgangs- und Zielgröße sein können. In diesem Fall sprechen Gudladt (2021, S. 15) und Hafner (2012, S. 39) vom *individuellen Dreisatz*. Vorteile des *Dreisatz* sind nach Gudladt (2021, S. 15), dass sich der *Dreisatz* vor allem für schwächere Schüler\*innen eignet und dass der *Dreisatz* die Verknüpfung von Prozentsatz, Prozentwert und Grundwert besonders betont. Kritisch sieht er jedoch, dass der *Dreisatz* im inhaltlichen Denken starr ist. Um dieser starren Notation entgegenzuwirken, fordert Kleine (2009), dass der funktionale Aspekt der Prozentrechnung stärker betont werden sollte. Durch die Betonung des funktionalen Aspekts sind in weiterer Folge Anknüpfungspunkte zur Proportionalität und zur späteren Einführung von Funktionen gegeben.

Bruch- oder Verhältnisgleichung

Die Strategie *Bruch- oder Verhältnisgleichung* ist analog zu den Lösungsverfahren bei der Proportionalität (Hafner, 2012, S. 39). So lassen sich laut Hafner (2012, S. 39) und Pöhler (2018, S. 23) zwei gegebene Größen in eine Bruchgleichung einsetzen, welche per Äquivalenzumformungen gelöst wird. Wie beispielsweise die folgende Berechnung zur Aufgabe mit Grundwert  $G = 210\text{€}$  und  $p\% = 15\%$ :

$$\begin{aligned} \frac{210\text{€}}{100\%} &= \frac{x}{15\%} \\ x &= \frac{210\text{€} \cdot 15\%}{100\%} \\ x &= 31,50\text{€} \end{aligned}$$



(Hafner, 2012, S. 39). Eine weitere Möglichkeit ist, dass wertgleiche Verhältnisse abgeleitet werden (Hafner, 2012, S. 39; Pöhler, 2018, S. 23). Wie Hafner (2012, S. 39) in folgendem Beispiel ausführt:

$$\begin{aligned}\frac{x}{210\text{£}} &= \frac{15\%}{100\%} \\ x &= \frac{15\% \cdot 210\text{£}}{100\%} \\ x &= 31,50\text{£}\end{aligned}$$

Durch diesen Zugang werden die proportionalen Zusammenhänge der einzelnen Größen der Prozentrechnung deutlich (Pöhler, 2018, S. 23).

Eine weitere Lösungsstrategie sind die durch Äquivalenzumformungen ineinander überführbare Prozentformeln (Gudladt, 2021, S. 17; Hafner, 2012, S. 40; Pöhler, 2018, S. 24). In vielen Schulbüchern werden alle drei Formeln angegeben und einer Grundaufgabe zugeordnet (Hafner, 2012, S. 40), was besonders für leistungsschwache Schüler\*innen zugänglich ist (Gudladt, 2021, S. 17). Am Beispiel mit Grundwert  $G = 210\text{£}$  und  $p\% = 15\%$  würde die Anwendung der Prozentformel laut Hafner (2012, S. 40) in der Art von

Prozentformeln

$$P = \frac{15 \cdot 210\text{£}}{100} = 31,50\text{£}$$

erfolgen. Sowohl R. Berger (1989, S. 85) als auch Gudladt (2021, S. 17) sehen das Auswendiglernen der Formeln als kritisch, da dies zu keiner stabilisierten Erkenntnisentwicklung führt und eine Entkopplung der Sachebene und der mathematischen Ebene stattfindet. Positiv hebt Gudladt (2021, S. 17) hervor, dass der mathematische Zusammenhang zwischen Grundwert, Prozentwert und Prozentsatz verdeutlicht wird.

Der Unterricht kann laut Greefrath (2018, S. 150) auf den Grundvorstellungen (vgl. Kapitel 3.2), der Analogie zu den Bruchzahlen und deren Grundvorstellungen (vgl. Kapitel 2.2.1) oder der Dreisatzrechnung anknüpfen. Greefrath (2018, S. 150) schlägt vor, dass für die Einführung der Prozentrechnung im Unterricht ein eher innermathematischer Zugang mithilfe unterschiedlicher Darstellungen von Bruchzahlen möglich ist. Die verschiedenen Darstellungsformen (vgl. Abb. 3.3) einer Zahl als Kreisdiagramm, als Bruch, Dezimalbruch und schließlich Prozentzahl können miteinander in Verbindung gebracht werden (Greefrath, 2018, S. 150).

Einführung in der Schule



Abbildung 3.3: Einführung der Prozentzahlen mittels Bruchdarstellung [entnommen von Greefrath (2018, S. 150)]

Als alternative Zugänge erwähnt Greefrath (2018, S. 151) den Vergleich von Anteilen durch Prozentangaben im Sachkontext oder die Auswertung realer Daten. Weiters merkt er an, dass die Nutzung von vielfältigen Darstellungsformen die Vernetzungen mit bereits bekannten mathematischen Inhalten verdeutlicht.

Prozentzahl

Der von Greefrath (2018, S. 150) vorgeschlagene Rückgriff auf Bruchzahlen und deren Vorstellung ist beispielsweise im Schulbuch *Genial! Mathematik 2* von Beer et al. (2019b) zu finden. In Abb. 3.4 ist ersichtlich, dass das Schulbuch mit unterschiedlichen Darstellungsformen arbeitet. Einerseits ist die grafische Visualisierung über ein Hunderterfeld angegeben und andererseits werden die Prozentzahlen über die Dezimalbrüche mit den Bruchzahlen verbunden.

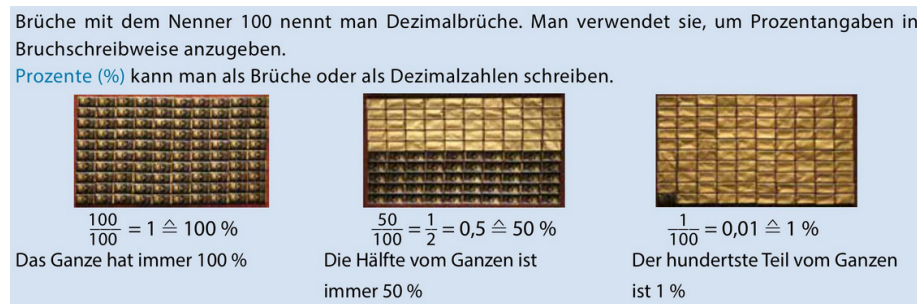


Abbildung 3.4: Einführung Prozentzahl [entnommen von Beer u. a. (2019b, S. 208)]

(Dürschnabel et al., 2019, S. 50) arbeiten in ihrem vorbereitenden Buch für ein *MINT*-Studium mit der Vorstellung, dass 1% der hundertste Teil eines Grundwertes ist. Motzer (2018, S. 35) greift die Verwandtschaft mit den Dezimalbrüchen als Sonderform der Brüche mit den Prozentzahlen auf. Weiters merkt sie an, dass in der Prozentrechnung der zugehörige Grundwert beachtet werden muss.

Kontext: Preis

Ein prototypisches Anwendungsgebiet der Prozentrechnung mit Alltagsbezug ist der Kontext *Preise* (Greefrath, 2018, S. 153; Pöhler, 2018, S. 9). Durch die Thematisierung von Rabatten und Steuern, lernen die Schüler\*innen gebräuchliche Alltagsbegriffe (Skonto, Rabatt, Mehrwertsteuer) kennen (Greefrath, 2018, S. 153). Das Wissen um den Grundwert (Motzer, 2018, S. 35) ist auch in Bezug auf den Alltagskontext *Preise* essenziell. Beispielhaft führt Greefrath (2018, S. 153) das Rechnen mit Mehrwertsteuer an, da der Grundwert in diesem Fall der Preis ohne Mehrwertsteuer ist. So entspricht der Endpreis (Preis inklusive Mehrwertsteuer) dem Prozentsatz  $(100 + p)\%$  beziehungsweise der Summe aus Grundwert und Prozentwert (Greefrath, 2018, S. 153).

vermehrter und verminderter Grundwert

Diese Alltagssituation zeigt, dass die drei Grundaufgaben der Prozentrechnung nicht immer ausreichen. Hafner (2012, S. 40) weist dem vermehrten ( $G + P$ ) oder verminderten ( $G - P$ ) Grundwert eine größere Bedeutung zu. Man spricht vom vermehrten Grundwert, wenn eine Größe  $G$  um  $p\%$  vergrößert wird (Hafner, 2012, S. 40). Hafner (2012, S. 40) gibt weiters an, dass in diesem Fall sowohl eine Grundvorstellung zur Prozentrechnung als auch eine Grundvorstellung zur Addition und Multiplikation aktiviert werden müssen. Die Reihenfolge der Aktivierung dieser Grundvorstellungen ist, wie die äquivalenten Gleichungen

$$G^+ = G + G \cdot \frac{p}{100} \quad (3.1)$$

$$G^+ = G \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \quad (3.2)$$

zeigen, beliebig (Hafner, 2012, S. 40). In Abb. 3.5 ist die grafische Visualisierung laut Gleichung (3.1) auf der linken Seite und laut Gleichung (3.2) auf der rechten Seite dargestellt.

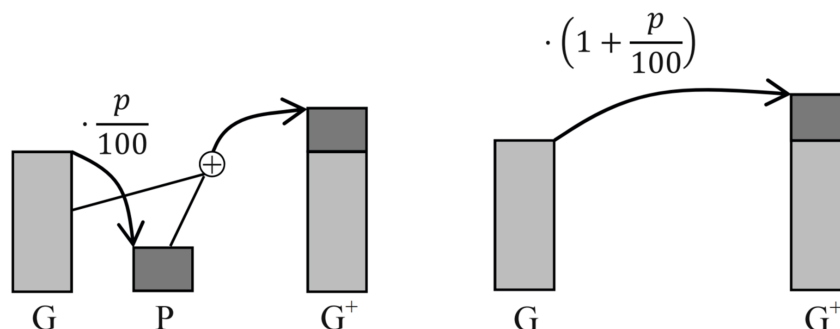


Abbildung 3.5: Vermehrter Grundwert (3.1) und (3.2) [entnommen von Hafner (2012, S. 41)]

Bei (3.1) wird zunächst mit einer Grundvorstellung der Prozentrechnung der Prozentwert bestimmt und anschließend die Summe aus Größe  $G$  und Prozentwert  $P$  gebildet (Hafner, 2012, S. 41). Bei (3.2) werden die zugeordneten Prozentsätze addiert  $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$  und der vermehrte Grundwert wird als Prozentwert des ursprünglichen Grundwerts aufgefasst (Hafner, 2012, S. 41). Die Operation *plus  $p\%$  von  $G$*  entspricht der Multiplikation  $\cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$  (Hafner, 2012, S. 41). Der verminderte Grundwert  $G^-$  wird analog dazu ermittelt.

### 3.3.1 Typische Schülerfehler in der Prozentrechnung

Die Prozentrechnung wartet – ähnlich zur Bruchrechnung – mit unterschiedlichen Grundvorstellungen und Zugängen auf, dennoch hat die Prozentrechnung ein eher hohes Komplexitätsniveau für Schüler\*innen. In diesem Unterkapitel wird ein Überblick über die in der Literatur beschriebenen Fehler der Schüler\*innen geboten, jedoch ohne Anspruch auf Vollständigkeit. Die Darstellung basiert hauptsächlich auf den Werken von Buchholtz et al. (2016), Hafner (2012) und Rosenthal et al. (2009). Rechenfehler, welche Hafner (2012, S. 91) zu den vier zentralen Fehlerquellen zählt, werden in dieser Arbeit nicht als typischer Schülerfehler in der Prozentrechnung gewertet, da Rechenfehler auch in anderen Gebieten vorkommen und nicht per se auf Unverständnis gegenüber Prozentzahlen und der Prozentrechnung zurückzuführen sind.

Der *Zuordnungsfehler bei Größen* gehört laut Hafner (2012, S. 91) zu den vier zentralen Fehlerquellen. Die Arbeiten von Buchholtz et al. (2016), Pöhler (2018) und Sander & Berger (1985) bestätigen die Häufigkeit des Fehlers bei der Lösung von Aufgaben durch Schüler\*innen. Bei diesem Fehler ordnen die Schüler\*innen die Zahlen der Aufgabenstellung falsch zu, so wird beispielsweise der Anteil als Grundwert gedeutet (Hafner, 2012, S. 91). Für die Aufgabe

Zuordnungsfehler bei  
Größen

*Ein Verein spendet 65% der Einnahmen des Sommerfests an eine gemeinnützige Organisation. Die Einnahmen betragen 1275£. Wie viel Geld spendet der Verein?*

wäre die Zuordnung  $65\% \hat{=} 1275\text{€}$  dem *Zuordnungsfehler bei Größen* geschuldet, da der Geldbetrag von  $1275\text{€}$  nicht als Grundwert erkannt wird (Hafner, 2012, S. 91). Buchholtz et al. (2016) sprechen hier von einer unreflektierten Anwendung des mathematischen „Wissens“. Eine fehlerhafte Identifikation von Prozentwert und Grundwert, welche wesentlich für die Lösung einer (Text-)Aufgabe ist, führt zu keinem korrekten Ergebnis (Pöhler, 2018, S. 30), da dadurch auch die Anwendung des richtigen Lösungsalgorithmus kein richtiges Ergebnis liefert (Sander & Berger, 1985). Laut Heinrichs (2015, S. 146) gehört zum *Zuordnungsfehler bei Größen* auch das fehlende Verständnis von Prozentwerten im Vergleich zu Absolutwerten und das fehlende Bewusstsein über die Bedeutung des Grundwertes in der Prozentrechnung. Weiters führt Heinrichs (2015, S. 146) an, dass diese Fehler vor allem bei der Nutzung der *Dreisatz-* oder *Operatorstrategie* auftreten.

Zuordnungsfehler bei math. Operationen Eine weitere zentrale Fehlerquelle laut Hafner (2012, S. 91) ist der *Zuordnungsfehler bei mathematischen Operationen*. In diesem Fall sprechen Rosenthal et al. (2009) davon, dass falsche Algorithmen zur Lösungsfindung herangezogen werden. Wenn das Beispiel

*Anton hat 650€ gespart und möchte 75% davon auf sein Sparbuch legen. Wie viel Geld bringt er zur Bank?*

mit dem Lösungsansatz  $650\text{€} : 75$  gelöst wird, wird mit der Division eine mathematische Operation verwendet, welche die gegebene Sachsituation nicht adäquat modelliert (Hafner, 2012, S. 91). Im Hintergrund dieser Fehlerstrategie ist die Vorstellung, dass Prozentrechnen Größen verkleinert (Hafner, 2012, S. 91). Dementsprechend arbeiten Schüler\*innen häufig mit den Rechenoperationen Division und Subtraktion (Rosenthal et al., 2009). Diese Rechenoperationen werden laut Hafner (2012, S. 91) verwendet, da die Schüler\*innen diese mit *Verkleinern* bzw. *Verringern* verbinden. Der *Zuordnungsfehler bei mathematischen Operationen* basiert auch auf der unreflektierten Anwendung mathematischer Regeln, da Schüler\*innen Arbeitsschritte oftmals rein auf der Ebene der mathematischen Symbolik ausführen (Buchholtz et al., 2016; Buchholtz, 2018). Der Rückgriff auf die Division im Sinne *Division verkleinert immer* basiert auf einer nicht gelungenen Zahlbereichserweiterung (Hafner, 2012, S. 180), was bereits in der Bruchrechnung für Probleme sorgt (Wartha, 2007).

Formelfehler Auch *Formelfehler* sind nach Hafner (2012, S. 91) zentrale Fehlerquellen. Bei Formelfehlern wird die Formel zur Berechnung des Prozentwerts falsch wiedergegeben (Hafner, 2012, S. 91). Beispielsweise wird die Formel

$$P = \frac{G \cdot 100}{p}$$

statt

$$P = \frac{G \cdot p}{100}$$

verwendet (Hafner, 2012, S. 91). Der *Formelfehler* kann unter anderem entstehen, wenn nur unzureichende Vorstellungen zum Prozentbegriff bei den Schüler\*innen ausgebildet sind und sich die

Schüler\*innen ausschließlich auf die Formel verlassen (Buchholtz et al., 2016). Hafner (2012, S. 143) gibt an, dass Schüler\*innen Formeln (klassische Prozentformeln oder Formeln zur Berechnung des verminderten/vermehrten Grundwerts) verwenden, ohne dass eine inhaltliche Überprüfung erfolgt, ob diese Formel für den jeweiligen Sachverhalt adäquat ist.

Ein weiterer Schülerfehler ist das Gleichsetzen von Prozentzahlen mit Einheiten (Gudladt, 2021, S. 57). Beispielsweise wird bei der Aufgabe von Rosenthal et al. (2009, S. 304) Prozent sind Einheiten

*In einer Vase sind 16 Blumen. 50% davon sind rot und der Rest gelb. Wie viele gelbe Blumen sind in der Vase?*

die inkorrekte Antwort 50 Blumen gegeben, da die 50% von den Schüler\*innen als 50 Einheiten interpretiert werden (Gudladt, 2021, S. 57). Laut Rosenthal et al. (2009) kann die intuitive Vorstellung von *Prozent als Einheiten* bereits vor dem Unterricht von Prozentzahlen ausgebildet sein, dabei sehen die Schüler\*innen die Prozentsätze als Zahlen und nicht als Operatoren. Die Autorinnen geben an, dass diese Fehlerstrategie auch nach der expliziten Behandlung im Unterricht vorhanden sein kann.

Ein typischer Schülerfehler laut Pöhler (2018, S. 30) ist die Schwierigkeit beim Umgang mit Prozentsätzen, welche größer als 100% sind. Laut Rosenthal et al. (2009) haben viele Schüler\*innen die Vorstellung, dass Prozentsätze kleiner als 100% sein müssen, dass damit operiert werden kann. Diese Vorstellung führt dazu, dass die Schüler\*innen falsche Algorithmen (Division oder Subtraktion) verwenden (Rosenthal et al., 2009) und dadurch auch in den *Zuordnungsfehler bei mathematischen Operationen* fallen. Die Verwendung eines Zahlenstrahls wie Feijs et al. (2008, S. 93) in Abb. 3.1 vorschlagen, kann die Erweiterung auf Prozentsätze größer 100% visualisieren. Die Schwierigkeit mit Prozentsätzen über 100% resultiert in vielen Fällen auf einer zu starken Betonung der Grundvorstellung von *Prozenten als Anteile* (Pöhler, 2018, S. 30). Diese Schwierigkeit scheint analog zu der Problematik der *Bruchzahlen als Anteil mehrerer Ganzer* (vgl. Kapitel 2.2.1) zu sein. Prozentsätze über 100

Ein falscher oder *nicht tragfähiger Umgang mit dem Prozentzeichen* ist ein weiterer Schülerfehler (Pöhler, 2018, S. 30). Rosenthal et al. (2009) und Hafner (2012, S. 149) bemerkten in ihren Studien, dass einige Schüler\*innen das Prozentzeichen entweder ignorierten oder das Zeichen einfach zu anderen Zahlen angehängt wurde. Rosenthal et al. (2009) folgern daraus, dass die Schüler\*innen nicht wussten, was das Prozentzeichen bedeutet und dass die Schüler\*innen durch Ignorieren des Zeichens nur mehr die beiden vorhandenen Zahlen in den Aufgaben fokussieren mussten. Ein *nicht tragfähiger Umgang mit dem Prozentzeichen* ist auch die Interpretation des Symbols als Rechenanweisung *geteilt durch 100* (Hafner, 2012, S. 149). Eine weitere fehlerhafte Deutung des Prozentzeichens ist die der Einheit (Hafner, 2012, S. 122). Das Vorgehen, Rechnungen ohne Einheiten durchzuführen und diese an das Ergebnis anzuhängen ist in der Praxis zwar weit verbreitet, jedoch sollte die Größe und deren Maßeinheit reflektiert werden (Hafner, 2012, S. 122). falscher Umgang mit Prozentzeichen

Die Deutung des Wortes *von* als Multiplikation statt des Vergleichs des Prozentwerts mit dem Grundwert gehört zu den typischen Schülerfehlern (Buchholtz et al., 2016). Am Beispiel 'von' heißt Multiplikation

*Die Polizei berichtet, dass 2 von 5 der kontrollierten Fahrräder nicht verkehrssicher waren. Wie viel Prozent sind das?*

von Buchholtz et al. (2016) würde die Fehlerstrategie *‘von’ heißt Multiplikation* zum Ergebnis

$$2 \cdot 5 = 10 \hat{=} 10\%$$

führen (Buchholtz et al., 2016). Diese Fehlerstrategie kann laut Pöhler (2018, S. 31) auf den multiplen Verwendungen der Präposition *von* basieren. Beispielsweise kann *von* als verbindende Präposition zwischen Grundwert und Prozentsatz identifiziert werden, wobei die Bedeutung des Inhalts der Aufgabenstellung von den Schüler\*innen nicht unbedingt rekonstruiert werden muss (Pöhler, 2014).

Reduktion auf einen Schritt Von Sander & Berger (1985) wurde die Strategie der *Reduktion auf einen Schritt* bei Schüler\*innen beobachtet. Es handelt sich dabei um eine *Einfachstrategie*, da versucht wird, die Aufgabe mittels einem Rechenschritt beziehungsweise einer Rechenoperation zu lösen (Sander & Berger, 1985). Beispielsweise wird bei der Aufgabe

*Eine Familie zahlt monatlich 1200£ Miete. Die Miete wird um 14% erhöht. Wie viel zahlt die Familie dann?*

die neue Miete mittels der Multiplikation  $1200 \cdot 14$  berechnet (Sander & Berger, 1985). Diese Fehlerstrategie hat somit Anknüpfungspunkte an den *Zuordnungsfehler bei mathematischen Operationen* und den *nicht tragfähigen Umgang mit dem Prozentzeichen*.

individuelle Anpassungsstrategie Laut Hafner (2012, S. 171) sind bei Schüler\*innen *individuelle Anpassungsstrategien* zu beobachten, welche dazu benutzt werden, unrealistische Ergebnisse in – für sie – plausibel erscheinende Lösungen zu transformieren. Beispielsweise wird der Zahl 2 eine Null angehängt, da der Prozentsatz von 20% als glaubhafter eingeschätzt wird (Hafner, 2012, S. 171). Gudladt (2021, S. 49) und Hafner (2012, S. 171) führen die *individuelle Anpassungsstrategie* auf eine fehlerhafte Vorstellung des Prozentbegriffs zurück. *Individuelle Anpassungsstrategien* können neben der Anwendung unverstandener Regeln und mathematischer Formeln die Ursache für die unterschiedlichen Fehlerquellen sein (Gudladt, 2021, S. 50).

### 3.3.2 Fehlende Grundvorstellungen

Rosenthal et al. (2009) konnten zeigen, dass Schüler\*innen bereits vor der konkreten Behandlung im Unterricht intuitive Vorstellungen zu Prozentzahlen haben. Diese kreativen Herangehensweisen gehen während der unterrichtlichen und formalen Einführung von Prozentzahlen und Prozentrechnung oftmals verloren, da die Schüler\*innen sich nur mehr auf die gelernten Lösungsverfahren verlassen (Pöhler, 2018, S. 29). Obwohl die Schüler\*innen bereits ein intuitives Vorverständnis und Alltagserfahrungen zu den Prozentzahlen besitzen, wird die Thematik der Prozentrechnung von Schüler\*innen als schwierig eingeschätzt (Gudladt, 2020; Pöhler, 2018, S. 29). Die anhand der Literatur ermittelten Fehlerstrategien (vgl. Kapitel 3.3.1) zeigen auf, dass diese Schwierigkeit auch in den unterschiedlichen Studien (Hafner, 2012; Pöhler, 2018; Rosenthal et al., 2009) bestätigt wurde. Einige der beschriebenen Fehlerstrategien der Schüler\*innen basieren auf dem Fehlen von Grundvorstellungen, welche in diesem Kapitel nochmals explizit angeführt werden.

Einige der Fehlerstrategien beruhen auf einer fehlerhaften oder nicht vollständig ausgebildeten Vorstellung des Prozentbegriffs (Gudladt, 2021, S. 49). Die individuellen Anpassungsstrategien führen Gudladt (2021, S. 49) und Hafner (2012) auf diese fehlende Grundvorstellung zurück. Die direkten Fehlvorstellungen des Prozentbegriffs führen keine der beiden Autoren an. Diese fehlende Grundvorstellung des Prozentbegriffs können sich auch verbal beim Kommunizieren über Prozent äußern. Beispielsweise führen Buchholtz et al. (2016, S. 39) und Hafner (2012, S. 137) die folgende Schülerantwort auf die Frage „Wie stellst du dir Prozent vor?“ an:

fehlende Vorstellung  
des Prozentbegriffs

„Also, das kann man schlecht erklären. Also ich weiß auch nicht. Als so 1% von 5 oder so, also das ist jetzt 1% halt von 5. [...] Das ist echt schwer.“

Weder das herangezogene Beispiel 1% von 5 noch die Wortbedeutung von Prozent konnten in der Schülerantwort konkret erklärt werden (Hafner, 2012, S. 137). Weiters wird in der Antwort deutlich, dass keine Unterscheidung zwischen den Größenbereichen Stück und Prozent gemacht wird (Buchholtz et al., 2016). Hafner (2012, S. 137–138) vermutet, dass durch die nicht adäquate beziehungsweise nicht vorhandene Vorstellung zum Prozentbegriff, Schüler\*innen Aufgaben zu Prozentzahlen nicht richtig lösen können.

Ein weiterer Grund für Schülerfehler oder Misskonzeptionen sind fehlende oder fehlerhafte Vorstellungen zu *Prozent als Anteil* (Buchholtz et al., 2016). Jedoch rät Pöhler (2018, S. 31) davon ab, dass die Grundvorstellung von *Prozent als Anteil* zu stark fokussiert wird, da in vielen Fällen diese Grundvorstellung bei den Rechenverfahren nicht mehr aufgegriffen wird. Die Anteilsvorstellung von Prozentzahlen kann jedoch eine Verbindung zu den Bruchzahlen darstellen, da nach der unterrichtlichen Behandlung der rationalen Zahlen die Grundvorstellung des *Bruchs als Anteil eines Ganzen* bereits angelegt wurde. Strucksberg & Prediger (2018) sprechen von einer *Flexibilisierung des Teil-Ganzen-Konzepts*, wenn Verstehensgrundlagen der Prozentrechnung aktiviert werden sollen. Die *fehlende Anteilsvorstellung* verursacht Rechen- und Interpretationsschwierigkeiten bei den Schüler\*innen und sollte daher im Unterricht behandelt werden.

fehlende Anteilsvorstellung

Im Sinne von Pöhler (2018, S. 31) sollte der Fokus bei der unterrichtlichen Behandlung von Prozentzahlen nicht nur auf *einer* Grundvorstellung liegen. Ähnlich wie Noll (2020, S. 31) spricht sich Pöhler (2018, S. 31) dafür aus, dass die Schüler\*innen möglichst viele verschiedene Grundvorstellungen entwickeln sollten. Noll (2020, S. 31) fügt noch ergänzend an, dass bei der Einführung die Fokussierung auf *eine ausgewählte* Grundvorstellung vorteilhaft ist. Da die beschriebenen Fehlerstrategien aus Kapitel 3.3.1 auf unterschiedliche Grundvorstellungen zurückgreifen beziehungsweise sich durch diese klären lassen, ist eine breitere Palette an Grundvorstellungen für den Umgang mit Prozentzahlen ein wichtiges Werkzeug, um das *Verständnis* der Schüler\*innen bezüglich Prozentzahlen zu verbessern.

Nur eine Grundvorstellung?

Die Bedeutung des Grundwerts für die Prozentrechnung ist essenziell. Ein fehlendes Bewusstsein über diese Bedeutung kann laut Heinrichs (2015, S. 146) zu Fehlern führen. Hafner (2012, S. 91) ordnet diese fehlende Grundvorstellung dem Fehler der *falschen Zuordnung von Größen* unter. Die Identifizierung des Grundwerts und Prozentwerts bei Aufgaben ist für Schüler\*innen schwierig (Greefrath, 2018, S. 154), da in vielen Fällen das Bewusstsein für den Grundwert fehlt. Das *fehlende Bewusstsein des Grundwerts* tritt unter anderem auf, wenn ein Zwischenergebnis als neuer Grundwert identifiziert werden muss (Gudladt, 2021, S. 49). Bei der Aufgabe

fehlendes Bewusstsein  
des Grundwerts

*Ein Sportgeschäft bietet ein Paar Ski für 400£ an. Vor Saisonbeginn wird der Preis um 20% erhöht. Im Frühjahr wird der Preis der Ski aufgrund des Winterschlussverkaufs um 15% reduziert. Wie viel kosten die Ski im Frühjahr?*

muss zuerst die Preiserhöhung ( $400 \cdot \frac{20}{100}$ ) berechnet werden und der Preisnachlass muss von diesem erhöhten Preis (neuer Grundwert) aus betrachtet werden. Laut Hafner (2012, S. 170) kann diese Problematik entweder auf Unverständnis gegenüber der Sachsituation oder Fehlen des mathematischen Bewusstseins (Bewusstsein des Grundwerts) zurückgeführt werden.

fehlerhafte Vorstellung  
der Rechenoperationen

Das fehlende mathematische Bewusstsein kann sich auch in *fehlerhaften Vorstellungen zu den Rechenoperationen* niederschlagen (Gudladt, 2021, S. 49). Hafner (2012, S. 148) führt an, dass die der Zuordnungsfehler aufgrund ausgebliebener Weiterentwicklung der Grundvorstellung zu den Rechenoperationen entsteht. Dabei werden die Subtraktion und die Division immer mit *Verkleinern* und die Addition und Multiplikation immer mit *Vergrößern* in Zusammenhang gebracht (Hafner, 2012, S. 148). Diese numerischen Misskonzeptionen können ausgebildet werden, wenn keine adäquaten Grundvorstellungen vorhanden sind (Bell et al., 1989). Darauf basiert die Forderung von Hafner (2012, S. 148), dass die Vorstellung der Rechenoperationen Multiplikation und Division bei der Zahlbereichserweiterung in die rationalen Zahlen behandelt und ausgebaut werden müssen. An dieser Stelle wird die Relation der Bruch- und Prozentzahlen deutlich. Die fehlenden Grundvorstellungen zu den Rechenoperationen können sich laut Strucksberg & Prediger (2018) auch auf fehlerhaftes Verständnis der vorherigen Thematiken stützen.

Auswendiglernen vs.  
Verständnis

Greefrath (2018, S. 154) stellt das Auswendiglernen von äquivalenten Formeln für die Prozentrechnung in Frage. Laut Greefrath (2018, S. 145) ist es kein sinnvolles Ziel des Mathematikunterrichts, Formeln auswendig zu lernen. Gudladt (2021, S. 17) merkt an, dass das mögliche Auswendiglernen aller drei Formeln für leistungsschwache Schüler\*innen besonders zugänglich ist. Dennoch kritisiert er, dass durch Auswendiglernen keine stabilisierte Erkenntnisentwicklung stattfinden kann. Das Auswendiglernen führt dazu, dass die Regeln und Rechenprozeduren im Vordergrund sind, aber die Bedeutung und das Verständnis des Prozentbegriffs dadurch in den Hintergrund verschoben werden (Hafner, 2012, S. 57). Weiters gibt Hafner (2012, S. 169) an, dass durch reproduziertes Wissen wie  $1\% = \frac{1}{100}$  und auswendig gelernte Regeln, wie beispielsweise „Das Wort ‘von’ wird mit mal übersetzt“ es den Schüler\*innen zwar gelingt, punktuelle Teilschritte richtig zu lösen, aber das tiefere Verständnis nur mangelhaft vertreten ist. Das strikte algorithmische Vorgehen unterstützt in vielen Fällen das Verständnis der Schüler\*innen bezüglich der Prozentrechnung nicht (Gudladt, 2021, S. 177+300).

strikte Notationssche-  
mata

Ein weiteres Hindernis im Verständnisprozess und beim Aufbau adäquater Grundvorstellungen sind die strikten Notationsschemata, welche sowohl mit der Prozent- als auch der Proportionalitätsrechnung einhergehen (Kleine & Jordan, 2007). Die strikten Notationsschemata wirken sich laut Kleine & Jordan (2007) negativ auf die Flexibilität innerhalb der Strategiewahl aus und verhindern im unteren Leistungsbereich sogar die erfolgreiche Anwendung. Laut Pöhler (2018, S. 30) können sich durch die zu starke Kalkülorientierung der Prozentrechnung keine oder nur marginal geeignete Grundvorstellungen ausbilden.



## Kapitel 4

# Hürden beim Verständnis von Bruch- und Prozentzahlen

Das Verständnis für rationale Zahlen ist eine wichtige Komponente des mathematischen Lernens, jedoch zeigen sich alters- und ortsunabhängige Schwierigkeiten im Umgang mit Bruch- und Prozentzahlen (Christou et al., 2020). Die Schwierigkeiten können im mathematischen Inhalt selbst wurzeln oder durch Vorerfahrung ausgelöst werden. Im folgenden Kapitel werden zwei Erklärungsansätze dargelegt: *epistemologische Denkhürden* von G. Brousseau (1983) und der *Natural Number Bias* von Ni & Zhou (2005).

In den Unterkapiteln wird versucht zuerst eine theoretische Annäherung an den jeweiligen Ansatz zu liefern und diesen mit den Bereichen der Bruch- und Prozentrechnung zu verbinden. Dazu werden auch die vorangegangenen Kapitel miteinbezogen, sodass ein konsistentes Bild entsteht.

### 4.1 Epistemologische Denkhürden

Ein Erklärungsansatz für die erläuterten Fehler aus Kapitel 2.3.1 und 3.3.1 können die von G. Brousseau (1983) definierten *epistemologischen Denkhürden* (*epistemological obstacles*) sein. Dieser Ansatz kann im Rahmen der *Conceptual Change Theory* formuliert werden und besitzt laut G. Brousseau (1983) ein konstruktivistisches Verständnis von mathematischen Lernprozessen. Der Begriff *Hürde* ist im allgemeinen Sprachgebrauch eher negativ konnotiert, die *Denkhürden* sind laut Prediger (2001) jedoch nicht nur Bestandteile des Wissensbildungsprozesses, sondern sollen als Teil des mathematischen Wissens verstanden werden. Dadurch bietet die Thematisierung *epistemologischer Denkhürden* große Bildungschancen (Prediger, 2001). Fehlvorstellungen können somit als notwendige Bruchstellen zur Weiterentwicklung des Verständnisses gesehen werden (Prediger, 2001). Weiters gilt, dass Lernprozesse nicht linear (Prediger, 2001) oder kumulativ (Prediger, 2008) ablaufen, sondern das Überwinden von Denkhürden ein essenzieller Faktor ist. Das Überwinden von diesen *epistemologischen Hürden* ist stark mit dem Verstehen von mathematischen Begriffen verbunden (vom Hofe et al., 2015).

### 4.1.1 Formale Definition

drei Lernhürden	Laut G. Brousseau (1983) haben Hürden im mathematischen Lernen ihren Ursprung in drei Bereichen. Die <i>ontogenetischen Denkhürden</i> gehen auf die kognitive Entwicklung des Lernenden zurück (Cortina et al., 2014). Diese Lernbarrieren treten laut Fauzi & Suryadi (2020) auf, wenn Einschränkungen der persönlichen Entwicklung der Schüler*innen auftreten oder die kognitive Bereitschaft für den Lerninhalt noch nicht gegeben ist. Um diese Denkhürde zu überwinden, wird die Reorganisation des Wissens mittels Assimilation und Akkommodation gefordert (Cortina et al., 2014). Die <i>epistemologischen Denkhürden</i> gründen sich in der Disziplin der Mathematik selbst (Cortina et al., 2014). Die dritte Hürde, welche G. Brousseau (1983) spezifizierte, ist die <i>didaktische Denkhürde</i> , welche durch die Lehr- und Lernstrategien und dem verwendeten Material entstehen (Cortina et al., 2014; Fauzi & Suryadi, 2020). Die <i>epistemologischen Denkhürden</i> können laut Sbaragli et al. (2011) von den <i>didaktischen Denkhürden</i> überlagert werden. Anders als <i>ontogenetische oder epistemologische Denkhürden</i> können und sollen <i>didaktische Denkhürden</i> vermieden werden (Cortina et al., 2014).
Fokus auf math. Inhalt	Wie von Cortina et al. (2014) beschrieben, gehen die <i>epistemologischen Denkhürden</i> auf den mathematischen Inhalt zurück. Die Hindernisse beim Lernen und Verstehen neuer Begriffe und Konzepte liegt somit in den zu lernenden Inhalten selbst und haben nichts mit den Fähigkeiten der Schüler*innen zu tun (Drollinger-Vetter, 2020, S. 89). Eine typische Schwierigkeit beim Übergang von den natürlichen Zahlen zu den rationalen Zahlen ist laut Drollinger-Vetter (2020, S. 89) der – für die natürlichen Zahlen so typische – Vor- und Nachfolger, welcher bei den rationalen Zahlen fehlt. Laut Prediger (2008) haben die <i>epistemologischen Denkhürden</i> nicht nur ihren Ursprung im mathematischen Inhalt, sondern auch in seiner Geschichte und der Entwicklung seiner Anwendungsgebiete.
Definition	G. Brousseau (1983) erklärt mit den <i>epistemologischen Denkhürden</i> ( <i>epistemological obstacles</i> ) die Verbindung zwischen dem Lernprozess und der mathematischen Struktur des Lerninhalts (Prediger, 2008).  <p style="text-align: center;">„Denkhürden mit rein epistemologischen Ursprung sind solche Hürden, denen man wegen ihrer konstitutiven Rolle für das zu konstruierende Wissen nicht entkommen kann und soll. Man kann sie in der Geschichte der Begriffe selbst wiederfinden.“ (G. Brousseau, 1983, S. 178 - Übersetzung der Autorin)</p> <p>Laut Prediger (2008) wird in dieser Bemerkung die empirische Frage des Verstehens von Schwierigkeiten im psychologischen Prozess des <i>Conceptual Changes</i> mit subjektspezifischen Fragen über die mathematischen Konzepte und Theorien verbunden. Aus diesem Grund ist eine mathematische <i>a priori</i> Analyse (Sachanalyse) ein wichtiges Hilfsmittel, um diese Denkhürden aufzudecken (Drollinger-Vetter, 2020, S. 89; Prediger, 2008).</p>
Bezug zu Conceptual Change Theory	Schwierigkeiten im Lernprozess können anhand des theoretischen Hintergrunds des <i>Conceptual Change Ansatzes</i> erklärt werden (Prediger, 2007). Der <i>Conceptual Change Ansatz</i> speist sich aus einer konstruktivistischen Lerntheorie und Piagets Konzept der Akkommodation (Prediger, 2006a). Der Ansatz betont laut Prediger (2007, S. 204), dass Lernen „nicht kumulativ verläuft in dem Sinne, dass neue Wissens Elemente zu bereits existierenden ‘addiert’ werden“. Bereits vorhandene Vorerfahrungen der Schüler*innen behindern beim Lernen und Verstehen eines Konzeptes eben jenen Erwerb von fachlich passenden Sichten (Drollinger-Vetter, 2020, S. 105). Diese Behinderung der

Aneignung beruht unter anderem darauf, dass das Vorwissen der Schüler\*innen mit den neuen und notwendigen Konzeptualisierungen inkompatibel ist und dadurch die Reorganisation des Wissens nicht immer fehlerfrei gelingt (Prediger, 2006a, 2007).

Die *Conceptual Change Theory* sollte insbesondere bei stofflichen Diskontinuitäten, wie beispielsweise *epistemologischen Denkhürden*, und den dazugehörigen Grundvorstellungen Berücksichtigung finden (Drollinger-Vetter, 2020, S. 89; Prediger, 2008). Die Diskontinuität von natürlichen und rationalen Zahlen wird in vielen Zugängen deutlich (Prediger, 2008). Ein Beispiel sind die – bereits erwähnten – „N-Verführer“ (Prediger, 2007). Hinderlich für den Verstehensprozess ist laut Prediger (2007), dass Schüler\*innen Kontinuitäten erzeugen, wo die mathematischen Konzepte Diskontinuitäten mit sich bringen. Für die Bruchzahlen sind die Diskontinuitäten in Kapitel 4.1.2 dargestellt. Unter anderem stellt die Diskontinuität der Konzepte der arithmetischen Operationen die Schüler\*innen vor Schwierigkeiten (Obersteiner et al., 2016). Ein Beispiel hierfür ist die Vorstellung, dass die Multiplikation immer vergrößert (Prediger, 2006a).

Klassifizierung als Diskontinuitäten

Fehler oder Schwierigkeiten gehen nicht immer auf das Ignorieren von Wissen oder Missverständnisse zurück, sondern werden in vielen Fällen von bereits Gelerntem beeinflusst (Cortina et al., 2014). Erlernte Konzepte, wie die von Prediger (2006a) erwähnte nicht tragfähige Vorstellung der Multiplikation, können sich bei neuen Konzepten als falsch oder unangepasst herausstellen (Cortina et al., 2014). Ähnlich zum *Conceptual Change Ansatz* werden *epistemologische Denkhürden* von Vorstellungen, Ideen und Deutungen geprägt, welche charakteristisch für den Umgang mit dem (vorhergehenden) Begriff sind (Prediger, 2001). Prediger (2001) folgert daraus, dass die Auseinandersetzung mit den Denkhürden und damit auch die Überwindung ebenjener für den weiteren Erkenntnisgewinn essenziell ist. Prediger (2008, S. 13) lokalisiert *epistemologische Denkhürden* folgendermaßen:

Einfluss des bereits Gelernten

„[I]t is not the intuitive rules that pose the main problem, but the necessary changes of mental models required.“

Viele Forscher\*innen bringen die Denkhürden mit den jeweiligen Gesetzen und Regeln des mathematischen Themengebiets, im Sinne einer hastigen Generalisation (*hasty generalization*) in Verbindung (Prediger, 2008).

*Epistemologische Denkhürden* liegen darin, dass ein Wechsel der Grundvorstellungen zum jeweiligen Konzept notwendig wird (Drollinger-Vetter, 2020, S. 89). Das Überwinden von diesen Denkhürden fordert nach Prediger (2007) die Reorganisation von Vorwissen, vor allem wenn die Schüler\*innen mit neuen Erfahrungen und Herausforderungen konfrontiert sind. Besonders wichtig ist, dass die Schüler\*innen die Konzepte und die damit verbundenen Grundvorstellungen lernen und nicht einfach die Schreibweisen oder das Kalkül (Sbaragli et al., 2011). Prediger (2006a) fügt an, dass bei einem Konzeptwechsel nicht alle mentale Modelle ausgetauscht werden müssen, sondern nur die nicht tragfähigen Vorstellungen. Der Prozess der Erkenntnisgewinnung ist aufgrund der Denkhürden nicht linear und fordert entweder den Aufbau neuer Grundvorstellungen oder den Wechsel von Grundvorstellungen (Prediger, 2008).

Grundvorstellungswechsel

Die *epistemologischen Denkhürden* können als integraler Bestandteil des Lernprozesses angesehen werden und somit sind sie auch ein Teil des mathematischen Wissens (Prediger, 2008). Daraus lässt sich folgern, dass die Denkhürden wichtige Inhalte des Lernprozesses sind (Prediger, 2008).

Hürden als Bildungschance

Da die *epistemologischen Denkhürden* sowohl Teil des mathematischen Wissens selbst als auch Bestandteil des Wissensbildungsprozesses sind, sollten sie laut Prediger (2001) als Bildungsinhalte mit großen Bildungschancen ernstgenommen werden. Die Schwierigkeit der direkten Thematisierung der Denkhürden liegt darin, dass die Lehrperson die *epistemologische Denkhürde* bereits überwunden hat und das Rückbesinnen und Erkennen der Denkhürde von dieser Perspektive äußerst schwierig ist (Drollinger-Vetter, 2020, S. 89). Die Auseinandersetzung mit den Denkhürden ist für weitere Erkenntnisprozesse essenziell und die Natur der *epistemologischen Denkhürden* gibt vor, dass diese nicht verhindert oder umgangen werden können (Cortina et al., 2014; vom Hofe et al., 2015, S. 165). Die Konsequenz besteht darin, dass Lernprozesse nicht soweit geglättet werden dürfen, sodass die zentrale Hindernisse ausgeklammert werden (vom Hofe et al., 2015, S. 165).

#### 4.1.2 Bezug zu den Bruchzahlen

Conceptual Change bei den Bruchzahlen

Die Zahlbereichserweiterung von den natürlichen zu den rationalen Zahlen weist einige Diskontinuitäten laut Prediger (2006a) auf. Diese Konzeptwechsel können mithilfe des *Conceptual Change Ansatzes* erklärt werden, da die Schüler\*innen bereits gelernte Konzepte überdenken, erweitern oder für ungeeignet erkennen müssen. Laut Winter (1999, S. 18) sind Schüler\*innen durch ihre Vorkenntnis der natürlichen Zahlen damit geprägt, dass „ihre arithmetischen Kompetenzen auf ungefragten, quasi archetypischen, intuitiv verankerten Überzeugungen beruhen“. Diese Überzeugungen werden in der Bruchrechnung in Frage gestellt und lösen einen Konzeptwechsel aus (Prediger, 2008; Winter, 1999, S. 16). Laut Winter (1999, S. 18) müssen bestimmte Grundüberzeugungen erschüttert werden, um die Zahlbereichserweiterung der natürlichen Zahlen in die rationalen Zahlen verstehen zu können.

Probleme der Zahlbereichserweiterung

Diese sechs Grundüberzeugungen fasst Winter (1999, S. 18) und Prediger (2001) wie folgt zusammen:

- **Kardination:** Sowohl Zahlen als auch Rechenaufgaben beantworten die Frage nach „wie viele?“.
- **Eindeutigkeit zwischen Zahl und Zahlzeichen:** Jede Zahl hat genau eine Zahlbezeichnung, welche in geschriebener Form aus einer Folge von Ziffern besteht und in gesprochener Form Grundzahlwörter mit Stellenwertangabe verwendet.
- **Diskrete Ordnung:** Jede Zahl hat einen Nachfolger und sofern es nicht die kleinste Zahl ist, einen Vorgänger. Somit kann die Menge als Zahlen als Kette mit Anfang aber ohne Ende interpretiert werden.
- **Unmittelbare Berechenbarkeit:** Jede Rechenoperation  $a + b$ ,  $a - b$  wenn  $a \geq b$ ,  $a \cdot b$  und  $a : b$ , wenn  $b$  Teiler von  $a$  ist, unmittelbar durchführbar und liefert wieder eine Zahl.
- **Einschränkung der Division:** Die Division  $a : b$  ist nicht in jedem Fall restlos möglich. Falls die Division möglich ist und der Teiler größer 1 ist, ist der Quotient immer kleiner als der Dividend.
- **Multiplikation und Ordnung:** Werden zwei Zahlen ( $\geq 1$ ) miteinander multipliziert, ist das Ergebnis größer als jede der beiden Zahlen. Multiplizieren wird als *starkes Vermehren* interpretiert.

Winter (1999, S. 18) sieht in diesen Problemen der Zahlbereichserweiterung eine „*unhintergehbare und nicht einfach hinwegmethodisierbare Schwierigkeit der Bruchrechnung*“. Prediger (2001) ver-

stärkt dieses Argument noch, in dem sie diese *Brüche bei den Brüchen* als wesentlichen Bestandteil des Wissens über Bruchzahlen einordnet.

Diskontinuitäten zwischen den natürlichen Zahlen und den Bruchzahlen stellen *epistemologische Denkhürden* dar (Prediger, 2007). Basierend auf den Grundüberzeugungen von Winter (1999) stellt Prediger (2007, S. 228) den Überblick der Diskontinuitäten von Konzepten bei der Zahlbereichserweiterung in Tabelle 4.1 zusammen.

Tabelle 4.1: Diskontinuitäten von Konzepten bei Zahlbereichserweiterung [nach Prediger (2007, S. 228)]

Aspekt	Natürliche Zahlen	$\Rightarrow$	Brüche
Kardination	Eine Zahl ist die Antwort auf die Frage "Wie viele?"	$\nRightarrow$	Ein Bruch beschreibt Anteile, relative Anteile, Quotienten, Verhältnisse...
Symbolische Repräsentation	eindeutige Repräsentation/symbolisch Darstellung einer Zahl	$\nRightarrow$	für eine Bruchzahl gibt es viele äquivalente Brüche
Ordnung	unterstützt durch natürliche Zählfolge	$\nRightarrow$	keine Unterstützung durch natürliche Zählfolge
Ordnung	Existenz eines eindeutigen Nachfolgers (Diskretheit)	$\nRightarrow$	weder ein eindeutiger Vorgänger noch Nachfolger (Dichtheit)
Ordnung	keine Zahl zwischen zwei benachbarten natürlichen Zahlen	$\nRightarrow$	Dichtheit: unendlich viele Bruchzahlen zwischen je zwei Zahlen
Addition - Subtraktion	unterstützt durch natürliche Zählfolge	$\nRightarrow$	keine Unterstützung durch natürliche Zählfolge
Multiplikation	Multiplikation (außer bei 0, 1) vergrößert immer	$\nRightarrow$	Multiplikation vergrößert ( $a > 1$ ) oder verkleinert ( $a < 1$ )
Division	Dividieren verkleinert immer	$\nRightarrow$	Division verkleinert oder vergrößert

Die Diskontinuitäten zeigen unter anderem auf, dass die Lehrperson auf das Vorwissen der Schüler\*innen eingehen muss und durch den erforderlichen Konzeptwechsel nicht unmittelbar nach der Einführung der Bruchzahlen mit geeigneten Vorstellungen der Schüler\*innen rechnen kann (Desmet et al., 2010). Im weiteren Verlauf dieses Kapitels werden exemplarisch einige der *epistemologischen Denkhürden* der Bruchzahlen und Bruchrechnung beschrieben.

Die Bedeutung von Bruchzahlen (*meaning of fractions*) fordert die Entwicklung mentaler Modelle beziehungsweise Grundvorstellungen dieses Begriffes, welche laut Dewi et al. (2017) nicht bei allen Schüler\*innen ausgebildet wurden. Fehlendes Verständnis der Bruchzahlen an sich führt zu Lernhürden bei den Rechenoperationen (Dewi et al., 2017). Im Kapitel 2.2.1 wurden bereits Grundvorstellungen beschrieben, welche das Verständnis des Konzepts der Bruchzahlen ermöglichen können. Laut Cortina et al. (2014) ist die Anteilssicht der Bruchzahlen der offensichtlichste Weg, um tieferes

Verständnis zu erreichen. Jedoch fügen die Autoren an, dass durch die Benutzung von teilbaren Objekten (wie Kuchen, Pizza etc.) der Ansatz Limitationen auferlegt bekommt. Daraus folgern Cortina et al. (2014) die Hürden, dass die irreversible Modifizierung der Objekte (Aufteilen in Teilstücke) das Verständnis der wechselseitigen Beziehung von Teil und Ganzem beeinträchtigt oder dass Schüler\*innen die Brüche als Zahlen betrachten, welche unterschiedliche Elemente quantifizieren. Die Bruchzahl wird in diesen Fällen nicht als eine Zahl wahrgenommen, sondern der Zähler und der Nenner werden jeweils gesondert interpretiert.

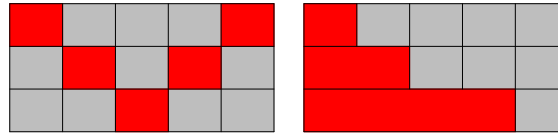


Abbildung 4.1: Epistemologische Denkhürden bei Anteilsvorstellung [adaptiert von Fauzi und Suryadi (2020, S. 58)]

Auch Fauzi & Suryadi (2020) sehen im fehlenden Verständnis des Bruches als *Anteil eines Ganzen* eine *epistemologische Denkhürde*. In Abb. 4.1 sind zwei typische Beispiele dargestellt, bei welchen Schüler\*innen laut Fauzi & Suryadi (2020) auf Hürden stießen. Die Fehler bei diesen beiden Beispielen korrespondieren zu den typischen Fehlerstrategien aus Tabelle 2.2. Dadurch wird die Verbindung der *epistemologischen Denkhürden* mit den typischen Fehlerstrategien der Schüler\*innen deutlich.

Probleme bei Addition  
und Subtraktion

Das fehlende Verständnis für die Bruchzahlen führt auch zu fehlerhaften Strategien bei den Rechenoperationen. Fauzi & Suryadi (2020) zählen die *Zähler-und-Nenner-Addition* beziehungsweise *-Subtraktion* (vgl. Tabelle 2.7) zu den *epistemologischen Denkhürden*. Diese Fehlerstrategien führen Fauzi & Suryadi (2020) auf ein geringes Verständnis der Bruchzahlen zurück. Die Idee der gleichnamigen Brüchen, welche bei Addition und Subtraktion benötigt wird, ist bei vielen Schüler\*innen nicht ausgeprägt und hängt mit einer fehlerhaften Anteilsvorstellung zusammen (Fauzi & Suryadi, 2020). Für Fauzi & Suryadi (2020) basieren solche Fehlvorstellungen auf der zu starken Konzentration auf Formeln und kalkülhaften Rechnen.

(Dis)-Kontinuitäten  
bei der Multiplikation

Neben den allgemeinen Diskontinuitäten bei der Zahlbereichserweiterung von den natürlichen zu den rationalen Zahlen (vgl. Tabelle 4.1) führt Prediger (2008) weitere Diskontinuitäten, aber auch Kontinuitäten bezogen auf die Multiplikation an (vgl. Tabelle 4.2).

Tabelle 4.2: Diskontinuitäten der Multiplikation für natürliche und rationale Zahlen [nach Prediger (2008, S. 14)]

Natürliche Zahlen	⇒	Brüche
<b>wiederholte Addition</b> ( $3 \cdot 5$ bedeutet $5 + 5 + 5$ )	⇏	kein entsprechendes mentales Modell
<b>Fläche eines Rechtecks</b> ( $3 \cdot 5$ ist die Fläche eines Rechtecks, welches 3 Einheiten breit und 5 Einheiten lang ist)	⇒	<b>Fläche eines Rechtecks</b> ( $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4}$ ist die Fläche eines Rechtecks, welches $\frac{2}{3}$ Einheiten breit und $\frac{5}{4}$ Einheiten lang ist)

Natürliche Zahlen	⇒	Brüche
kein entsprechendes mentales Modell	⇏	<b>Anteilsvorstellung</b> ( $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2}$ meint $\frac{2}{3}$ von $\frac{5}{2}$ )
<b>multiplikatives Vergleichen</b> (doppelt so viel)	⇒	<b>multiplikatives Vergleichen</b> (halb so viel)
<b>Vergrößern</b> ( $3 \cdot 5$ bedeutet, dass 5 cm dreimal gestreckt wird)	⇒	<b>Vergrößern und Verkleinern</b> ( $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2}$ meint, dass $\frac{5}{2}$ auf $\frac{2}{3}$ davon komprimiert wird)
<b>kombinatorische Interpretation</b> ( $3 \cdot 5$ ist die Anzahl der Möglichkeiten um 3 T-Shirts mit 5 Hosen zu kombinieren)	⇏	kein entsprechendes mentales Modell

Aus Tabelle 4.2 kann gefolgert werden, dass bei der Zahlbereichserweiterung nicht alle mentalen Modelle verändert werden müssen. Prediger (2008) macht darauf aufmerksam, dass die Interpretation der Multiplikation als *Fläche eines Rechtecks* oder als *Vergrößern* tragfähig bleiben. Im Gegensatz dazu gibt es sowohl in den natürlichen Zahlen als auch in den rationalen Zahlen mentale Modelle, welche keinen Gegenpart im jeweils anderen Zahlbereich besitzen (Prediger, 2008).

### 4.1.3 Bezug zu den Prozentzahlen

Prozentzahlen weisen, trotz ihres hohen Alltagsbezugs, große Schwierigkeiten und Herausforderungen für Schüler\*innen auf (Barratta et al., 2010). Neben dem starken mathematischen Zusammenhang mit den Bruchzahlen (Feijs et al., 2008, S. 95) ist auch eine Relation zu den Proportionen gegeben (Barratta et al., 2010). Schwierigkeiten oder Verständnislücken in diesen Bereichen können somit Einfluss auf das Verstehen der Prozentzahlen haben. Grundvorstellungen sowie typische Schülerfehler im Bereich der Bruchzahlen beziehungsweise Bruchrechnung sind im Kapitel 2 beschrieben. Eine vertiefte Auseinandersetzung mit Proportionalität und deren Schwierigkeit ist unter anderem bei Barratta et al. (2010), Feijs et al. (2008), Kleine & Jordan (2007) und Wijaya et al. (2019) zu finden.

Zusammenhang mit anderen Bereichen

Durch das enge Verhältnis von Prozentzahlen zu Bruchzahlen und Proportionen ist die Interpretation einer Zahl in diesen unterschiedlichen Bereichen essenziell. Barratta et al. (2010) sprechen von Äquivalenzen zwischen den Zahldarstellungen, wie beispielsweise

Zusammenhang der Zahlbereiche

$$\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 0,75 = 75\% = 3 : 4.$$

Padberg & Wartha (2017, S. 31–32) beziehen sich in diesem Fall auf die unterschiedlichen Schreibweisen von rationalen Zahlen, wie beispielsweise als gemeiner Bruch, Dezimalbruch, Verhältnis oder Prozent. Der Zusammenhang dieser Schreibweisen wird laut Padberg (2012, S. 194) oftmals nicht erkannt, was unter anderem an der unterrichtlichen Aufteilung der Bereiche liegt. Ohne Vernetzungsmöglichkeit interpretieren Schüler\*innen Prozente, Brüche und Dezimalzahlen als voneinander getrennte mathematische Bereiche ohne Berührungspunkte.

(Dis-)Kontinuitäten  
der Prozentzahlen

Im Gegensatz zu den Bruchzahlen gibt es für die Thematisierung *epistemologischer Denkhürden* bei den Prozentzahlen nahezu keine Forschungsprojekte, dies kann unter anderem an der mathematischen Gleichheit dieser Bereiche liegen. Angelehnt an die Analyse der Kontinuitäten und Diskontinuitäten der natürlichen und der rationalen Zahlen ergibt sich aus der Arbeit von Barratta et al. (2010) Tabelle 4.3 für die natürlichen Zahlen und Prozentzahlen.

Tabelle 4.3: (Dis-)Kontinuitäten der natürlichen Zahlen und Prozentzahlen [nach Barratta u.a. (2010, S. 61) und Prediger (2008, S. 14)]

Natürliche Zahlen	⇒	Brüche
kein entsprechendes mentales Modell	⇏	<b>Ausdrücken von Anteilen</b> (74% der Punkte bei einem Test)
<b>multiplikatives Vergleichen</b> (doppelt so viel)	⇒	<b>multiplikatives Vergleichen</b> (200%, 50%)
<b>Addition</b>	⇏	<b>Prozente addieren ist multiplizieren</b> (3% addieren, bedeutet den Grundwert mit 1,03 zu multiplizieren)
<b>Multiplikation vergrößert</b>	⇏	<b>Multiplikation vergrößert oder verkleinert</b>
<b>Division verkleinert</b>	⇏	<b>Division verkleinert oder vergrößert</b>

Barratta et al. (2010) geben an, dass das Ausdrücken von Anteilen, der multiplikative Vergleich oder die multiplikative Veränderung mittels Prozentzahlen am einfachsten ist.

Prozent bedeutet dividieren?

*Epistemologische Denkhürden* basieren unter anderem auf der Fehlvorstellung, dass Prozent dividieren bedeutet (Barratta et al., 2010). Diese Misskonzeption führt beispielsweise dazu, dass 24 von 500 mittels  $500 : 24$  berechnet wird (Barratta et al., 2010). Weiters geben die Autoren an, dass bei solchen Fehlvorstellungen häufig das Prozentzeichen ignoriert wird.

## 4.2 Natural Number Bias

Ein Spezialfall dieser Denkhürden wird durch den *Natural Number Bias (NNB)* repräsentiert (Stampfer et al., 2019). Viele Lernenden haben Schwierigkeiten mit den rationalen Zahlen, da sie sich permanent auf ihr Wissen über natürliche Zahlen berufen (Obersteiner et al., 2016). Weiters merken die Autoren an, dass das Wissen über natürliche Zahlen essenziell für das Lernen von rationalen Zahlen ist, jedoch kommt es zu Schwierigkeiten, wenn die Konzepte analog verwendet werden. Der *Natural Number Bias* wird vor allem bei Schüler\*innen identifiziert, da sich diese vor allem auf ihre Intuition über natürliche Zahlen verlassen (Obersteiner et al., 2016). Die Autoren führen hier unter anderem die schon öfters erwähnte Heuristik „*Multiplikation vergrößert, Division verkleinert*“ an. Die Mathematiker\*innen verließen sich jedoch auf ihre Intuition bezüglich



algebraischer Ausdrücke. Daraus schließen Obersteiner et al. (2016), dass es für Experten möglich ist, vom *Natural Number Bias* unberührt zu bleiben. Dies ist möglich, wenn man sich auf Strategien verlässt, in welchen keine natürlichen Zahlen involviert sind.

### 4.2.1 Formale Definition

Ein weiterer Erklärungsansatz für Hürden beim Verständnisprozess bezüglich der Bruchzahlen ist laut Ni & Zhou (2005), Reinhold (2019, S. 41) und Stampfer et al. (2019) der *Natural Number Bias (NNB)*. Der *Natural Number Bias* ist die Grundlage für die Erklärung der Schwierigkeiten, welche bei der Zahlbereichserweiterung von den natürlichen Zahlen ( $\mathbb{N}$ ) zu den rationalen Zahlen ( $\mathbb{Q}$ ) nachgewiesen werden können (Ni & Zhou, 2005; Obersteiner et al., 2016; Reinhold, 2019, S. 41). Ni & Zhou (2005, S. 28) beschreiben den *Natural Number Bias* wie folgt:

Begriffserklärung NNB

*„The whole number bias thus refers to a robust tendency to use the single-unit counting scheme to interpret instructional data on fractions. This bias causes children’s difficulty to perceive whole numbers as decomposable units.“*

Laut Ni & Zhou (2005) beschreibt der Begriff *Bias* eine systematische und häufige Abweichung von einer Norm. Damit beschreibt der *Natural Number Bias* die „gegenüber Veränderung weitgehend resistente Tendenz“ von Schüler\*innen im Umgang mit rationalen Zahlen den Rückgriff auf Konzepte der natürlichen Zahlen zu wählen (Reinhold, 2019, S. 41). Eine unzureichende deutsche Übersetzung des *Natural Number Bias* ist die *Dominanz einer natürlichen Zahlheuristik* (Reinhold & Reiss, 2020).

Ni & Zhou (2005) prägten in ihrer Veröffentlichung den Begriff *Whole Number Bias*. Laut Christou et al. (2020) und Reinhold (2019, S. 41) setzte sich in der Fachwissenschaft jedoch die Terminologie *Natural Number Bias* durch. Beim *Natural Number Bias* liegt die Betonung vermehrt auf dem positiven Charakter der Zahlen (Obersteiner et al., 2013). Die Entscheidung der Verwendung des Begriffs *Natural Number Bias* oder *Whole Number Bias* basiert laut van Hoof et al. (2015b) auf der Einbezugnahme der negativen Zahlen. Die Autoren verwenden die Terminologie *Natural Number Bias*, da der positive Charakter der natürlichen Zahlen bei kognitiven Prozessen mit rationalen Zahlen auch als unangemessen angenommen werden kann und dadurch weitere Hürden bildet.

Natural Number Bias und Whole Number Bias

Der *Natural Number Bias* basiert vor allem auf nicht vollständig vollzogene Zahlbereichserweiterungen von den natürlichen Zahlen zu den rationalen Zahlen (Reinhold, 2019, S. 45). Einerseits ist das Vorwissen der natürlichen Zahlen essenziell, um rationale Zahlen zu erlernen beziehungsweise zu verstehen, andererseits werden dadurch auch Schwierigkeiten und Misskonzeptionen ausgelöst (Obersteiner et al., 2016). Dies liegt unter anderem an den Eigenschaften der rationalen Zahlen, die kein entsprechendes Pendant in den natürlichen Zahlen haben und vice versa (Obersteiner et al., 2016; Reinhold et al., 2020). Prediger (2008) greift diesen Sachverhalt als Kontinuitäten beziehungsweise Diskontinuitäten (vgl. Tabelle 4.1) auf. Die Vorerfahrung mit natürlichen Zahlen prägt laut Roell et al. (2017) und van Hoof et al. (2015a) die Annahmen, Überzeugungen und Erwartungen der Schüler\*innen darüber, was eine Zahl ist und wie sich Zahlen verhalten.

Übergang der natürlichen zu rationalen Zahlen

Bei der Zahlbereichserweiterung der natürlichen Zahlen zu den rationalen Zahlen lassen sich vier Dimensionen definieren, welche häufig einen *Natural Number Bias* generieren (Reinhold, 2019, S.

Dimensionen des NNB

41). Die Dimensionen Dichte (*density*), Darstellung (*representation*), Größe (*size*) und Operationen (*operations*) greifen beim *Natural Number Bias* auf nicht mehr tragfähige Vorstellungen von natürlichen Zahlen zurück (Obersteiner et al., 2016; Reinhold, 2019, S. 41–42). Im Folgenden werden die Dimensionen des *Natural Number Bias* kurz umrissen, vertiefte Darstellungen sind bei Obersteiner et al. (2016) oder Reinhold (2019) zu finden:

- **Dichte:** Die natürlichen Zahlen sind diskret geordnet und jede Zahl hat genau einen Nachfolger (Reinhold, 2019, S. 42). Natürliche Zahlen können im Sinne von Kardinalzahlen zum Zählen verwendet werden (Prediger, 2008). Weiters beantworten natürliche Zahlen laut Prediger (2008) Fragen nach “wie viele?” (vgl. Tabelle 4.1). In den rationalen Zahlen ist weder ein Vorgänger noch ein Nachfolger einer Bruchzahl gegeben (Obersteiner et al., 2016). Eine weitere Schwierigkeit der Dichte der rationalen Zahlen für Schüler\*innen ist, dass zwischen zwei rationalen Zahlen unendlich viele Zahlen liegen (Christou et al., 2020; Obersteiner et al., 2016). Der *Natural Number Bias* kann dazu führen, dass Schüler\*innen zwischen zwei pseudo-konsekutiven Zahlen (wie beispielsweise 0,5 und 0,6 oder  $\frac{3}{5}$  und  $\frac{4}{5}$ ) nicht unendlich viele Zahlen sehen (Christou et al., 2020; Desmet et al., 2010).
- **Darstellung:** Eine bereits erwähnte Problematik ist die fehlende eindeutige Darstellung der rationalen Zahlen im Gegensatz zu der Eindeutigkeit natürlicher Zahlen (Obersteiner et al., 2016; Reinhold, 2019, S. 43). Padberg & Wartha (2017, S. 32) geben die verschiedenen Schreibweisen einer rationalen Zahl wie folgt an: gemeiner Bruch, Dezimalbruch, Maßstab, Verhältnis, Quotient, Prozent und Promille. Da rationale Zahlen auf Äquivalenzklassen basieren, lassen sich mittels Kürzen und Erweitern, unendlich viele, wertgleiche Brüche finden (Reinhold, 2019, S. 43). Schüler\*innen haben einen *Natural Number Bias*, wenn sie Verständnisschwierigkeiten bezüglich der verschiedenen symbolischen Repräsentationen ein- und derselben Zahl haben (Reinhold, 2019, S. 43). Laut Obersteiner et al. (2016) sehen auch Universitätsstudent\*innen einen konzeptuellen Unterschied zwischen Bruch- und Dezimalschreibweise.
- **Größe:** Der Größenvergleich der natürlichen Zahlen gestaltet sich aufgrund ihrer diskreten Ordnung und ihrer Kardination einfacher als bei rationalen Zahlen (Reinhold, 2019, S. 43). Der Vergleich von rationalen Zahlen kann nicht auf Anzahlen beruhen, wenn kein kleinster positiver Bruch existiert, sondern muss auf der Grundlage von Anteilen geschehen (Reinhold, 2019, S. 43). Dabei spielen sowohl der Zähler als auch der Nenner der beiden zu vergleichenden Brüche eine Rolle (Reinhold, 2019, S. 43). Schüler\*innen fallen unter den *Natural Number Bias*, wenn sie den Größenvergleich basierend auf dem Vergleich der einzelnen Komponenten durchführen, anstatt eine holistische Betrachtungsweise des Bruches zu fokussieren (Obersteiner et al., 2013; Reinhold & Reiss, 2020). Ein weiterer Aspekt des *Natural Number Bias* der Dimension Größe ist laut van Hoof et al. (2015b) die Vorstellung, dass der numerische Wert des Bruches sich erhöht, wenn sowohl der Nenner als auch der Zähler erhöht werden.
- **Operationen:** Bei der Zahlbereichserweiterung der natürlichen Zahlen zu den rationalen Zahlen verlieren auch Grundvorstellungen beziehungsweise mentale Modelle bezüglich der Rechenoperationen ihre Tragfähigkeit (Reinhold & Reiss, 2020). Die bisher mehrmals erwähnten Fehlvorstellungen *Multiplikation vergrößert* und *Division verkleinert* fallen laut Christou et al. (2020) und Roell et al. (2017) unter den *Natural Number Bias*. Diese Fehlvorstellungen basieren auf den Vorerfahrungen der Schüler\*innen mit den Rechenoperationen in den natürlichen Zahlen (Obersteiner et al., 2016). Wie Prediger (2008) die Vorstellung der Multiplikation als mehrfache Addition als Diskontinuität zwischen den Zahlenbereichen beschreibt, sehen Obersteiner et al. (2016) keine tragfähige Fortführung dieses mentalen Modells in den rationalen

Zahlen. Reinhold (2019, S. 44) versteht in der Dimension Operation den *Natural Number Bias* als „grundlegenden Schwierigkeiten von Lernern [...], diese konzeptuell grundlegend veränderten arithmetischen Operationen korrekt durchführen und interpretieren zu können“.

Die vier Dimensionen *Dichte*, *Darstellung*, *Größe* und *Operation* beschreiben essenzielle Unterschiede zwischen den natürlichen und den rationalen Zahlen (Reinhold, 2019, S. 45). Weiters geben die Dimensionen bereits Erklärungsansätze für die typischen Schülerfehler beziehungsweise Misskonzeptionen aus Kapitel 2.3.1. Reinhold (2019, S. 45) sieht in der Dimension Operation eine zentrale Bedeutung für die Bruchrechnung. Die drei anderen Dimensionen sind bedeutsam für den *Anfangs*unterricht des Bruchzahlbegriffs und dadurch für das Bruchzahlverständnis (Reinhold, 2019, S. 45).

Der Erklärungsansatz des *Natural Number Bias* kann im Rahmen der *Conceptual Change Theory* formuliert werden (Reinhold, 2019, S. 41). Die Ursache für den *Natural Number Bias* ist laut Reinhold (2019, S. 45) der nicht vollständig vollzogene Konzeptwechsel bei der Zahlbereichserweiterung der natürlichen zu den rationalen Zahlen. Durch das Vorverständnis und die Erfahrungen der Schüler\*innen mit den natürlichen Zahlen ist für die Bruchrechnung ein Konzeptwechsel notwendig (Christou et al., 2020). Weiters geben die Autoren an, dass der enorme Einfluss dieses initialen Nummernkonzepts im *Natural Number Bias* resultieren kann, sodass Eigenschaften der natürlichen Zahlen fälschlicherweise auf die rationalen Zahlen übertragen werden. Daraus folgt, dass ohne einen Konzeptwechsel bei der Zahlbereichserweiterung die Wahrscheinlichkeit für den *Natural Number Bias* steigt.

Zusammenhang mit  
Conceptual Change  
Theory

Die *Dual-Processing-Theory* nimmt an, dass der Mensch über zwei unterschiedliche kognitive Systeme verfügt: Ein intuitives System, welches auf Basis von Intuition schnell und automatisiert Entscheidungen trifft und ein analytisch denkendes System, das durch aufwändige Gedankengänge elaborierte Entscheidungen trifft (Reinhold, 2019, S. 49). Der *Natural Number Bias* tritt auf, wenn einerseits das Wissen um natürliche Zahlen schnell und automatisch aktiviert wird und andererseits die analytischen Prozesse die automatisch generierten Repräsentationen nicht überlagern (Alibali & Sidney, 2015; Obersteiner et al., 2013). Die Fehler können laut Alibali & Sidney (2015) darauf zurückgeführt werden, dass das intuitive System allgegenwärtig ist und das analytische System nicht rechtzeitig eingreift. Damit in Situationen, in denen die algorithmischen Strategien (analytisches System) mit den heuristischen Strategien (intuitives System) miteinander in Konflikt stehen, ist eine starke intrinsische Kontrolle notwendig, um die irreführenden Heuristiken zu vermeiden (Roell et al., 2017).

Zusammenhang mit  
Dual Processing  
Theory

Angelehnt an die *Dual-Processing-Theory* lässt sich die Leistung der Schüler\*innen bezüglich kongruenter und inkongruenter Aufgaben erklären (Reinhold, 2019, S. 50). Eine Aufgabe ist *inkongruent* zu den natürlichen Zahlkonzepten, wenn Schüler\*innen, welche einem *Natural Number Bias* unterliegen, die Aufgabe konsequent falsch lösen (Reinhold & Reiss, 2020). Inkongruente Aufgaben lösen eine fehlerhafte Übertragung der Eigenschaften natürlicher Zahlen auf rationale Zahlen aus (Stampfer et al., 2019). Hinsichtlich der *Dual-Processing-Theory* benötigen inkongruente Aufgaben das analytische System, welches die intuitiv gegebene, inkorrekte Erstantwort richtigstellt (Obersteiner et al., 2013). Im Gegensatz zu den inkongruenten Aufgaben können *kongruente* Aufgaben auch dann richtig gelöst werden, wenn ein ausgeprägter *Natural Number Bias* vorliegt. In Tabelle 4.4 sind sowohl Beispiele für kongruente als auch für inkongruente Aufgaben bezüglich der vier Dimensionen zu finden.

kongruente und inkongruente Aufgaben

Tabelle 4.4: Kongruente und inkongruente Aufgaben der vier Dimensionen des NNB [nach Reinhold (2019, S. 48)]

Dimension	Kongruente Aufgabe	Inkongruente Aufgabe
Dichte	Gibt es zwischen $\frac{1}{5}$ und $\frac{4}{5}$ mehr als 2 Zahlen? Gib eine Zahl an, welche zwischen $\frac{3}{8}$ und $\frac{7}{8}$ liegt.	Gibt es zwischen $\frac{1}{15}$ und $\frac{4}{15}$ mehr als 5000 Zahlen? Gib zwei verschiedene Zahlen an, welche zwischen $\frac{5}{9}$ und $\frac{7}{9}$ liegen. Gib eine Zahl an, welche zwischen $\frac{5}{7}$ und $\frac{6}{7}$ liegt.
Darstellung	Gib 0,25 in Bruchschreibweise an.	Gibt es mehr als 500 Möglichkeiten, den Bruch $\frac{3}{4}$ zu schreiben?
Größe	Ist der Bruch $\frac{2}{5}$ oder der Bruch $\frac{3}{5}$ größer?	Ist der Bruch $\frac{1}{8}$ oder der Bruch $\frac{1}{3}$ größer?
Operationen	Kann $2 \cdot x > 2$ korrekt sein?	Kann $2 \cdot x < 2$ korrekt sein?

Laut Reinhold (2019, S. 48) bieten beide Aufgabentypen die Möglichkeit, Einblick in das grundlegende Verständnis der Schüler\*innen zu erhalten. Weiters haben die unterschiedlichen Aufgaben auch eine praktische Bedeutung für den Unterricht: Schüler\*innen müssen die Grenzen der bisher tragfähigen Konzepte selbst erfahren, da die Unzufriedenheit über bewährte Konzepte, welche Aufgaben nicht mehr lösen können, zu einem Konzeptwechsel führt (Reinhold & Reiss, 2020).

NNB ist kein Anfängerfehler

Inkongruente Aufgaben werden durch den *Natural Number Bias* zwar konsequent falsch gelöst (Reinhold & Reiss, 2020), jedoch zeigen *natural-number-biased* Schüler\*innen laut Alibali & Sidney (2015) nicht bei jeder Aufgabe oder Berechnung einen Fehler. Weiters beschränkt sich der *Natural Number Bias* nicht nur auf Schüler\*innen im Anfangsunterricht, sondern zieht sich durch alle Altersklassen und Bildungsgrade durch (Alibali & Sidney, 2015). So zählen Alibali & Sidney (2015) sowohl Schüler\*innen als auch Erwachsene und sogar Mathematiker\*innen auf. Die Ausprägung des *Natural Number Bias* kann nach Alibali & Sidney (2015) variieren:

- der *Natural Number Bias* ist anhand der Fehlermuster ersichtlich,
- der *Natural Number Bias* zeigt sich in Reaktionszeiten (Rechenzeit) oder
- der *Natural Number Bias* ist an der Strategiewahl erkenntlich.

Obwohl die unterrichtliche Behandlung der rationalen Zahlen den *Natural Number Bias* zurückgehen lässt, bleibt er auch im Erwachsenenalter bestehen (Braithwaite & Siegler, 2018). Dies liegt insbesondere daran, dass das initiale Zahlenkonzept (das Zahlenkonzept der natürlichen Zahlen) vor allem bei den intuitiven Strategien äußerst dominant ist (Christou et al., 2020). Ni & Zhou (2005, S. 27) sprechen davon, dass der *Natural Number Bias* ist „related to the very nature of human numerical cognition“. Zusätzlich ist der *Natural Number Bias* mit den kognitiven Prozessen beim Erwerb von Zahlkonzepten verbunden (Ni & Zhou, 2005).

möglicher Ursprung des NNB

Der Ursprung des *Natural Number Bias* ist mit zwei Bereichen verbunden: einerseits mit der Herkunft numerischer Kompetenz und andererseits mit der Herkunft früher quantitativer Repräsentationen zusammen (Ni & Zhou, 2005). Für Ni & Zhou (2005) ergaben sich drei Zugänge, um den

Ursprung des *Natural Number Bias* zu erklären. Im Folgenden werden diese drei Hypothesen kurz umrissen, für eine vertiefte Auseinandersetzung wird direkt auf die Arbeit von Ni & Zhou (2005) verwiesen:

- **The Innate Constraint Hypothesis:** Diese Hypothese geht davon aus, dass Schüler\*innen Zahlen nur diskret repräsentieren. In diesem System gibt es keine Möglichkeit, gebrochene Zahlen zu erzeugen. Die Diskretheit der mentalen Repräsentation erschwert es den Schüler\*innen rationale Zahlen zu verstehen.
- **The Undifferentiated Amount Hypothesis of Early Quantitative Representation:** Der Grundgedanke dieser Hypothese ist, dass frühe Repräsentationen von Mengen „*not number-based, but total-amount-based, for both a discrete quantity and a continuous quantity*“ sind (Ni & Zhou, 2005, S. 32).
- **The Learning Account:** Bei dieser Hypothese wird nicht nur das extern gesteuerte Lehren, sondern auch das individuelle Lernen der Schüler\*innen in den Fokus genommen. Die Problematik ist, dass Schüler\*innen aufgrund ihrer Vorerfahrung und ihrer Ideen, was eine Zahl ist, sich selbst im Lernprozess für rationale Zahlen behindern können. Das vorhandene Wissen wird von den Schüler\*innen von den natürlichen Zahlen auf die rationale Zahlen projiziert.

Ni & Zhou (2005) kritisieren jedoch, dass es bis dato keine ausreichende Evidenz gibt, dass einer dieser Ansätze eine adäquate Erklärung für den *Natural Number Bias* liefert.

#### 4.2.2 Einfluss auf die Bruchzahlen

Schüler\*innen welche dem *Natural Number Bias* unterliegen, zeigen nicht bei jeder Aufgabe mit rationalen Zahlen eine fehlerhafte Lösungsstrategie (Alibali & Sidney, 2015). Laut Reinhold et al. (2020) können drei unterschiedliche Cluster bezüglich des *Natural Number Bias* angenommen werden: den *Typical Bias* (bessere Leistung bei symbolischen Größenvergleichen von Brüchen und kongruenten Aufgaben), den *Reverse Bias* (bessere Leistung bei inkongruenten Aufgaben) und *No Bias* (gleichbleibende Leistung bei kongruenten und inkongruenten Aufgaben). Zusätzlich geben die Autoren an, dass Schüler\*innen im Cluster *No Bias* eine signifikant längere Bearbeitungszeit benötigen als Schüler\*innen aus den anderen beiden Clustern. Im Hinblick auf die *Dual-Processing-Theory* kann hier mit der analytischen Strategie argumentiert werden.

Auftreten des NNBS

Der *Natural Number Bias* tritt weder bei jeder Aufgabe noch in allen Dimensionen gleich stark auf. Basierend auf ihrer Studie folgern van Hoof et al. (2015a), dass der *Natural Number Bias* in der Dimension Größe (*size*) am schwächsten vertreten ist. In der Dimension Operationen (*operation*) erhöht sich die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des *Natural Number Bias* merklich (van Hoof et al., 2015a). Bei weitem am stärksten werden die Schüler\*innen in der Dimension Dichte (*density*) vom *Natural Number Bias* eingeschränkt (van Hoof et al., 2015a). Über die Problematik in der Dimension Darstellung werden von den Autoren keine Angaben gemacht (van Hoof et al., 2015b, 2015a).

stark betroffene Dimensionen

Im Gegensatz zu den natürlichen Zahlen sind rationale Zahlen dicht und haben damit keinen direkten Vorgänger oder Nachfolger (Reinhold, 2019, S. 42). Das Verlassen des diskreten Bereichs der natürlich Zahlen birgt für Schüler\*innen Schwierigkeiten in sich (Reinhold, 2019, S. 42; Vamvakoussi

Dimension Dichte

& Vosniadou, 2010). Das Übertragen der diskreten Ordnung der natürlichen Zahlen auf die rationalen Zahlen ist ein typischer Aspekt des *Natural Number Bias* in dieser Dimension (Reinhold, 2019, S. 42). Vamvakoussi & Vosniadou (2010) gehen davon aus, dass die Problematik nicht nur auf der Dichte liegt, sondern auch in der Notation der rationalen Zahlen. Beispielhaft führen Vamvakoussi & Vosniadou (2010, S. 4) folgende Erklärung eines Schülers an:

„Between 0,001 and 0,01 there are nine numbers. Or maybe ten—I’m not so sure about that. But if you convert them to fractions, you can find more numbers in between. You can find infinitely many numbers.“

In diesem Beispiel ist offensichtlich, dass die diskrete Ordnung der natürlichen Zahlen auf die Dezimalzahlen übertragen wurde und obwohl Dezimalzahlen und Brüche ineinander übergeführt werden können, ist keine diskrete Ordnung der rationalen Zahlen gegeben (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). Das kann daran liegen, dass ein Konzeptwechsel nicht dem Prinzip *alles oder nichts* folgt (van Hoof et al., 2015b). Die Ergebnisse von Vamvakoussi & Vosniadou (2010) zeigen jedoch, dass diese Fehler weitgehend alters- und erfahrungsunabhängig sind. Laut Reinhold (2019, S. 42) lassen sich durch die Probleme in der Dimension Dichte die typischen Schülerfehler im Bereich der ikonischen Repräsentationen (vgl. Tabelle 2.2) und dem Erweitern und Kürzen (vgl. Tabelle 2.5 sowie 2.6) erklären.

Dimension Darstellung Schüler\*innen sind *natural-number-biased* in der Dimension Darstellung, wenn sie Verständnisschwierigkeiten haben, dass eine Zahl durch unterschiedliche Schreibweisen repräsentiert werden kann (Reinhold, 2019, S. 43). Viele Schüler\*innen und selbst Student\*innen neigen dazu, Dezimalzahlen und Brüche als konzeptuell unterschiedliche mathematische Objekte zu betrachten (Reinhold, 2019, S. 43). Laut Ni & Zhou (2005) können unter anderem Leistungsunterschiede beobachtet werden, je nachdem es sich um eine gesprochene oder symbolische Repräsentation eines Bruches handelt. So wird das Problem “Wie viel ist ein Drittel plus ein Drittel?” korrekt mit “Zwei Drittel.” beantwortet (Ni & Zhou, 2005). Gleichzeitig wird  $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$  berechnet und sowohl für valide als auch korrekt gehalten (Ni & Zhou, 2005). Laut Braithwaite & Siegler (2018, S. 2) resultiert der *Natural Number Bias* unter anderem „from reliance on componential representations“, da das Verhältnis von Zähler und Nenner nicht einsehbar ist. Bezugnehmend auf die typischen Schülerfehler (vgl. Kapitel 2.3.1) lassen sich laut Reinhold (2019, S. 43) die Fehler im Bereich des Erweiterns und Kürzens (vgl. Tabelle 2.5 sowie 2.6) mit dem *Natural Number Bias* bezüglich der Darstellung erklären.

Dimension Größe In der Dimension Größe spielen vor allem Größenvergleiche eine Rolle (Reinhold, 2019, S. 43). Wenn Schüler\*innen dem *Natural Number Bias* unterliegen, betrachten sie beim Größenvergleich den Bruch nicht als holistische Zahl, sondern trennen Nenner und Zähler (Braithwaite & Siegler, 2018; Reinhold, 2019, S. 43). Vor allem bei Größenvergleichen von gleichnamigen Brüchen werden die Bruchzahlen nicht holistisch betrachtet (Obersteiner et al., 2013). Der Größenvergleich wird vereinfacht, wenn die Schüler\*innen eine robuste Repräsentation von Brüchen auf der Zahlengerade besitzen (Alibali & Sidney, 2015). Die unterschiedlichen Schreibweisen der rationalen Zahlen können auch beim Größenvergleich zu Problemen führen. So beschreiben van Hoof et al. (2015b), dass beim Vergleich von 0,37 und 0,4 oftmals die Antwort 0,37 gegeben wird, da 37 größer als 4 ist. Der *Natural Number Bias* führt dazu, dass Größenvergleiche von Brüchen oftmals kontraintuitiv sind, da der Bruch mit den größeren natürlichen Zahlen nicht unbedingt größer ist (Reinhold et al., 2020). Der *Natural Number Bias* liefert nach Reinhold (2019, S. 44) auch Erklärungsansätze für typische Schülerfehler im Bereich des Größenvergleichs (vgl. Tabelle 2.4).

Ein in der Literatur immer wieder beschriebener Fehler beim Größenvergleich von rationalen Zahlen ist der Vergleich der Länge der Nachkommastellen (Roell et al., 2017). Dieser Fehler greift auf Strategien mit den natürlichen Zahlen zurück: In den natürlichen Zahlen werden Zahlvergleiche auf Basis der Länge der Zahl und dann Ziffer für Ziffer durchgeführt (Reinhold & Reiss, 2020). Durch diese Vorerfahrungen entstehen im *Natural Number Bias* die Vorstellungen, dass längere Dezimalzahlen (Zahlen mit vielen Nachkommastellen) größer sind (van Hoof et al., 2015a).

Anzahl Nachkommastellen

Im Hinblick auf die Dimension Operationen beschreibt der *Natural Number Bias* die grundlegenden Schwierigkeiten der Schüler\*innen die arithmetischen Operationen korrekt durchzuführen und zu interpretieren (Reinhold, 2019, S. 44). Für diese Dimension sind die bereits öfter erwähnten Fehler *Multiplikation vergrößert* und *Division verkleinert* typisch (Christou et al., 2020; Obersteiner et al., 2016; Reinhold, 2019, S. 44; Reinhold et al., 2020; van Hoof et al., 2015b, 2015a). Diese beiden Fehler werden von den Schüler\*innen als wahr angenommen (van Hoof et al., 2015a). So werden die Aufgaben

Dimension Operationen

$$x > x \cdot 2$$

$$7 > z \cdot 7$$

von Schüler\*innen und Student\*innen als unmöglich bewertet (Christou et al., 2020; Obersteiner et al., 2016; Roell et al., 2017). Obersteiner et al. (2016) fordern einen abstrakteren Blick auf die Rechenoperationen der rationalen Zahlen, da Vorstellungen, wie *Multiplikation als wiederholte Addition*, nicht in jedem Fall tragfähig bleiben.

Die unterschiedlichen Schreibweisen der rationalen Zahlen, wie sie beispielsweise von Padberg & Wartha (2017) beschrieben wurden, erschweren den Schüler\*innen den Umgang mit diesem Zahlenbereich. Ni & Zhou (2005) beschreiben die Kluft zwischen dem Erlernen von Zahlenkonzepten und dem Erlernen von Notationssystem als weiterer Aspekt, welcher das Verständnis erschwert. Sie referenzieren auf ein – für das mathematische Denken zentrale – Paradoxon: Einerseits erhält ein Bruch wie  $\frac{1}{2}$  seine Bedeutung durch die Situation, auf welche er sich bezieht. Andererseits ist die mathematische Kraft durch das Loslösen aus solchen Situationen gegeben. Diese Doppelfunktion von mathematischen Notationen birgt laut Ni & Zhou (2005) viele Schwierigkeiten für Schüler\*innen. Was beispielsweise auch darin resultiert, dass rationale Zahlen in Bruch- beziehungsweise in Dezimalschreibweise als zusammenhangslos betrachtet werden (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010).

Dualität mathematischer Notation

### 4.2.3 Möglichkeiten zum Überwinden des NNBs

Laut Obersteiner et al. (2013) ist eine komplette Überwindung des *Natural Number Bias* auch für Mathematiker\*innen nahezu unmöglich. Durch Erfahrungen im Bereich der rationalen Zahlen kann der *Natural Number Bias* jedoch zurückgehen (Braithwaite & Siegler, 2018). Auch die Studie von Obersteiner et al. (2016) zeigt auf, dass mit ausreichend Erfahrung und mathematischem Wissen, das naive und intuitive System umgangen werden kann, sodass der *Natural Number Bias* minimiert wird. In diesem Kapitel werden, basierend auf den Arbeiten von van Hoof et al. (2015b), Obersteiner et al. (2013) und Prediger (2001), Möglichkeiten zur Überwindung des *Natural Number Bias* dargestellt. Die Aufzählung erhebt jedoch keinen Anspruch auf Vollständigkeit.

Überwinden des NNB

holistische Betrachtung	Betrachtung	Braithwaite & Siegler (2018) und Obersteiner et al. (2013) zeigten auf, dass viele Schüler*innen eine rationale Zahl nicht holistisch betrachten, sondern den Zähler und Nenner getrennt interpretieren. Diese Interpretation ist durch die zu starke Konzentration auf natürliche Zahlen bedingt (Obersteiner et al., 2013). Die Autoren sehen in der holistischen Betrachtung der Brüche das Hauptziel des Lernens in diesem Zahlenbereich. Die Entwicklung eines sogenannten „fractional number sense“ oder „rational number sense“ ermöglicht auch den flexiblen und adaptiven Umgang mit Zahlen (Obersteiner et al., 2013, S. 70).
Betrachtung über Algorithmen hinaus	über Algorithmen hinaus	Der Anfangsunterricht der Bruchrechnung soll im ersten Moment die Ausbildung eines Verständnisses für rationale Zahlen fördern und erst nachgelagert die Basisfähigkeiten im Umgang mit den Brüchen bearbeiten (Reinhold, 2019, S. 52). Der algorithmische Zugang ist laut Obersteiner et al. (2013) in vielen Klassen der <i>Normalzustand</i> , fördert jedoch nicht die holistische Betrachtungsweise der Brüche. Im späteren unterrichtlichen Verlauf sollten die Algorithmen ihren Platz finden, da laut Obersteiner et al. (2016) der <i>Natural Number Bias</i> durch eine korrekte Anwendung eines Algorithmus oder einer Lösungsstrategie minimiert werden kann.
Strategiewahl ermöglichen	ermöglichen	Eine weitere Möglichkeit zum Überwinden des <i>Natural Number Bias</i> ist das Ausbilden unterschiedlicher Lösungsstrategien (Obersteiner et al., 2013). Den Autoren zufolge benutzen Schüler*innen bereits eine große Variation an Lösungsstrategien, jedoch werden nicht immer die effizientesten Strategien gewählt und manche Strategien sind fehlerhaft oder nicht tragfähig. Das Ausbilden unterschiedlicher Strategien basiert laut Alibali & Sidney (2015) auf den Nummernkonzepten, welche die Schüler*innen besitzen. Adäquate mathematische Lösungsstrategien sollten demnach im Unterricht ausgebildet werden.
Dimensionen einbeziehen	einbeziehen	Die vier Dimensionen spielen beim <i>Natural Number Bias</i> eine große Rolle. Ein gutes Verständnis der Dimension Größe ist laut Obersteiner et al. (2013) eine Voraussetzung, um die Dimension der Operationen tiefergehend zu begreifen. Die Autoren folgern auch, dass das Verstehen der Dichte der rationalen Zahlen positiv beeinflusst wird, jedoch fehlen in diesem Bereich Forschungsergebnisse. Für den Unterricht bedeutet dieses Ergebnis, dass das Verständnis der Schüler*innen im Bereich der Größe im Anfangsunterricht explizit fokussiert werden muss.
Unterschiede der Zahlbereiche	Zahlbereiche	Prediger (2008) führt zwar einige Kontinuitäten zwischen den natürlichen Zahlen und den rationalen Zahlen an, jedoch sind in der Tabelle 4.1 auch Diskontinuitäten zu finden. Um ein höheres Bewusstsein für die Unterschiede zwischen den beiden Zahlbereichen zu erreichen, sollten diese explizit thematisiert werden (Prediger, 2001). Durch das systematische Aufzeigen der Unterschiede zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ kann der <i>Natural Number Bias</i> laut van Hoof et al. (2015b) minimiert werden.
vielfältige Grundvorstellungen aufbauen	Grundvorstellungen aufbauen	Beim Anfangsunterricht der Bruchrechnung sollte das Verständnis für rationale Zahlen in den Mittelpunkt gestellt werden (Reinhold, 2019, S. 52). Für das Erreichen dieses Verständnisses wird in der Literatur eine Vielzahl von Grundvorstellungen beschrieben (vgl. Kapitel 2.2.1). Das inhaltliche Verständnis der Brüche ist eine Grundvoraussetzung um Bruchstellen, wie beispielsweise den <i>Natural Number Bias</i> zu überwinden (Prediger, 2001). Es sollten laut Prediger (2001, S. 11) nicht nur vielfältige Vorstellungen aufgebaut, sondern diese auch thematisiert werden, denn gewachsene Grundüberzeugungen „können nur durch Bewusstheit über ihre fehlende Tragfähigkeit überwunden werden“.
Wunder zulassen und aufklären	zulassen und aufklären	Das Entdecken der Diskontinuitäten zwischen den natürlichen Zahlen und den rationalen Zahlen ist ein Anlass, sich zu wundern (Prediger, 2001). Diese Wunder (beispielsweise, dass die Multiplikation auch verkleinern kann) sollten aber nicht nur erlebt, sondern auch inhaltlich thematisiert und



erklärt werden (Prediger, 2001). Das Wundern kann aber auch die eigene Intuition über rationale Zahlen betreffen, da die Intuition irreführend sein kann und den Schüler\*innen einiges an mentaler Kontrolle abverlangt, dass der intuitive Gedanken überwunden wird (Obersteiner et al., 2013).

Fehlersuchaufgaben in fingierten oder realen, aber fehlerhaften Lösungen fordern Schüler\*innen auf, sich mit Fehlern auseinandersetzen zu müssen (Prediger, 2001). Weiters gilt, dass eigene Fehler zu betrachten und zu behandeln weitaus wirkungsvoller ist. Laut Prediger (2001) sollten für die Fehlersuchaufgaben nicht nur auf der Ebene der Rechenregeln bereits etablierte Fehlersuchaufgaben verwendet werden, sondern auch Aufgaben zu inhaltlichen Fehlvorstellungen. Fehler aufdecken

Denkhürden, wie der *Natural Number Bias* sollten immer dann aufgegriffen werden, wenn sie im Lernprozess auftreten (Prediger, 2001). Aber auch eine systematisch inszenierte Auseinandersetzung kann laut Prediger (2001) zielführend sein. Das Arbeiten im Prinzip „*hands-on*“ unter der Nutzung verschiedenen Materials kann unter anderem bei der holistischen Repräsentation von Brüchen helfen und somit den *Natural Number Bias* schmälern (Obersteiner et al., 2013). Auseinandersetzung inszenieren



# Kapitel 5

## Forschungsinteresse

Auf der Basis der dargestellten Literatur des Kapitels 4, welches sich auf Kapitel 2 und Kapitel 3 stützt, lassen sich zwei grundsätzliche Ziele dieser Arbeit definieren. Diese beziehen sich einerseits auf das Entwickeln einer Lern-App zum Überwinden von *epistemologischen Denkhürden* und andererseits auf die Evaluierung der Lern-App bezüglich der Thematisierung der Schwierigkeiten in einer Begleitstudie. Im Folgenden werden beide Ziele noch explizit beschrieben. Basis

Wie bereits erwähnt soll auf der Basis der dargestellten Literatur der vorigen Kapitel eine Lern-App, welche explizit die *epistemologischen Denkhürden* im Bereich der Bruch- und Prozentrechnung bedient, entwickelt werden. Obwohl laut Obersteiner et al. (2013) die komplette Überwindung des *Natural Number Bias* – als Spezialfall der *epistemologischen Denkhürden* – nahezu unmöglich ist, verfolgt die Lern-App das Ziel die Denkhürden entweder zu *überwinden* oder diese wenigstens zu *minimieren*. Da laut Braithwaite & Siegler (2018) der *Natural Number Bias* zumindest durch ausreichend Erfahrung minimiert werden kann. Die Lern-App ist vor allem für den Einsatz an Schulen gedacht. Die vornehmliche Zielgruppe sind die Schüler\*innen im Bereich der Sekundarstufe I, da sowohl die Bruch- als auch die Prozentrechnung in diesen Jahren eingeführt werden. Die App besitzt keine Alterseinschränkung bezüglich der Schüler\*innen, da sie auch zum Zweck des Festigens oder Wiederholens in höheren Schulstufen zum Einsatz kommen kann. Durch das Aufzeigen von didaktischen Hintergründen bietet sich die Lern-App aber auch für Lehrpersonen oder angehende Lehrer\*innen in ihrer Studienzeit an. Durch diese beiden Aspekte hat die Lern-App zwei Zielgruppen, nämlich die Schüler\*innen und die (zukünftigen) Lehrer\*innen. Das Ziel des Entwickelns der Lern-App setzt sich aus zwei Schritten zusammen: Ziel 'Lernapp'

- **Identifizieren der Inhalte:** Basierend auf den beschriebenen *epistemologischen Denkhürden* wird eine Auswahl getroffen und diese Inhalte zu interaktive Aufgaben entwickelt. Dabei wird versucht, typische Schülerschwierigkeiten aufzugreifen, welche im praktischen Unterricht auftreten. Es werden nicht alle *epistemologischen Denkhürden* der Bruch- und Prozentzahlen bedient, sondern nur ausgewählte Hürden und Aufgaben. Weiters werden die identifizierten Inhalte in diesem Schritt mit den jeweiligen Grundvorstellungen und weiteren didaktischen Hintergründen verbunden.
- **Technische Umsetzung:** Die technische Umsetzung fokussiert auf die Entwicklung eines prototypischen Modells einer Lern-App zum Aufgreifen von *epistemologischen Denkhürden*.

Dementsprechend soll die Lern-App ein prototypisches Modell darstellen, welches durch weitere Aufgaben im Bereich der Bruch- oder Prozentrechnung erweitert oder durch andere Teilbereiche der Mathematik ergänzt werden kann. Um einen barrierefreien Zugang zu schaffen, wird die technische Umsetzung die Entwicklung einer Web-App in den Fokus stellen, da dadurch weder Downloads noch Installationsarbeiten für den Endnutzer anfallen.

Das erste Ziel bezieht sich demnach auf die Entwicklung eines Prototypen einer Lern-App basierend auf den identifizierten Inhalten der Literatur.

Ziel 'Begleitstudie'

Das zweite Ziel der vorliegenden Arbeit ist eine kleine Begleitstudie zum entwickelten Prototypen der Lern-App. Dabei fokussiert sich die Begleitstudie – im Sinne der qualitativen Forschung – auf die Evaluierung der Zielerreichung der Lern-App. Für die Begleitstudie wurden zwei Forschungsfragen – mit Blick auf die Zielerreichung – entwickelt. Die Hauptfrage lautet:

F1: Inwiefern thematisiert die Lern-App Schwierigkeiten in der Bruch- und Prozentrechnung, die in der unterrichtlichen Praxis relevant sind?

Die erste Forschungsfrage respektive Hauptfrage zielt direkt auf die Intention der entwickelten Lern-App respektive der entwickelten Aufgaben ab. Mittels dieser Forschungsfrage soll eruiert werden, inwiefern die identifizierten Inhalte aus dem *Ziel 'Lernapp'* tatsächlichen Schülerschwierigkeiten entsprechen. Außerdem wird noch Wert daraufgelegt, inwiefern die Lern-App die Schwierigkeiten thematisiert. Aufgrund des Fokus der Arbeit auf das Überwinden *epistemologischer Denkhürden* liegt unter anderem der Fokus auf der Praxisrelevanz, sodass in der Lern-App nicht rein theoretische Konzepte, sondern Probleme aus dem Schulunterricht angesprochen werden. Aus dieser Überlegung leitet sich die zweite Forschungsfrage ab, welche folgendermaßen lautet:

F2: Ist die Lern-App adäquat für die Zielgruppe und den Einsatz in der Schule?

Bei dieser Forschungsfrage ist offensichtlich, dass sie sich auf die adäquate Umsetzung der Lern-App mit Blick auf die bereits definierte Zielgruppe konzentriert. Eine Lern-App, welche für Schüler\*innen der Sekundarstufe I entwickelt wird, sollte auch passend für dieses Altersgruppe sein. Weiters ist bei dieser Forschungsfrage auch die Einsatzmöglichkeit der Lern-App im schulischen Alltag mitbedacht. Eine möglichst variable Palette an Einsatzmöglichkeiten der Lern-App gehört zu den Entwicklungszielen und sollte dementsprechend auch evaluiert werden.

# Kapitel 6

## Inhalt der Lern-App

In der nachfolgenden Beschreibung wird der Inhalt der Lern-App beschrieben und mit den theoretischen Hintergründen beziehungsweise *epistemologischen Denkhürden* verbunden. Sowohl im Bereich der Bruch- als auch der Prozentrechnung werden einige wenige ausgesuchte Aspekte näher beschrieben und in der Lern-App behandelt. Durch das Ziel des Entwickelns einer prototypischen Lern-App für dieses Format sind die entwickelten Aufgaben noch beschränkt. Erweiterungsmöglichkeiten werden jedoch bereits für den Aufbau der Lern-App mitbedacht.

Bezüglich des Lehrplans lässt sich die Lern-App in die Sekundarstufe I einordnen, da das Arbeiten mit rationalen Zahlen sehr früh in die Ausbildung einfließt. In der ersten Klasse wird im Themenbereich *Arbeiten mit Zahlen und Maßen* mit der Darstellung von Dezimal- und Bruchschreibweisen sowie einfachen, leicht deutbaren Berechnungen begonnen. Das Rechnen mit Prozenten wird in der zweiten Klasse eingeführt. Die unterschiedlichen *Gesichter* der rationalen Zahlen werden somit zeitlich versetzt im Curriculum eingeplant. Weiters wird der Punkt „*Überführung der Bruchdarstellung in die Dezimaldarstellung und vice versa*“ im Themenbereich *Arbeiten mit Zahlen und Maßen* in der zweiten Klasse angeführt, ohne die Vernetzungsmöglichkeit mit Prozenten zusätzlich anzugeben. Der *Pilot-Kompetenzraster für die Sekundarstufe I* des BMBWF (2019) inkludiert bereits die Kompetenz, zwischen den Darstellungsformen von Zahlen wechseln zu können. Diese Kompetenz spiegelt die bereits angesprochenen Vernetzungsmöglichkeiten wider. Die Kompetenzentwicklung im Bereich der rationalen Zahlen ist auch im Hinblick auf die Sekundarstufe II wichtig. Lerninhalte wie beispielsweise Zinsrechnung, Wachstumsprozesse oder Wahrscheinlichkeitsrechnung greifen auf die rationalen Zahlen und deren Rechenregeln zurück. Die Forderung des Lehrplans der Sekundarstufe I im Bereich Arithmetik, welche nicht nur das Rechnen mit rationalen Zahlen, sondern auch dessen Gesetzmäßigkeiten fokussiert, ist auch auf lange Sicht äußerst sinnvoll.

Lehrplanbezug

Ein Großteil der Aufgaben wird randomisierte Elemente enthalten. Die Randomisierung erlaubt es, aus einfachen Aufgaben-Settings eine Vielzahl an Übungsmöglichkeiten zu schaffen. Die Randomisierung der Aufgaben wurde gewählt, sodass die Schüler\*innen die Möglichkeit erhalten, trotz derselben Aufgabe eine große Anzahl an *neuen* und *veränderten* Aufgabenstellungen lösen zu können. Die Alternative der vordefinierten Menge an Lösungen für die Aufgaben wurde verworfen, da die Schüler\*innen ansonsten keinen allzu großen Pool an unterschiedlichen Inputs erhalten.

Randomisierung der Aufgaben

## 6.1 Bereich Bruchzahlen

Im Bereich Bruchzahlen wurden für das prototypische Modell der Lern-App drei unterschiedliche Aufgaben entwickelt. Alle Aufgaben sind interaktiv und bieten durch die bereits erwähnte Randomisierung viele Übungsmöglichkeiten. Die Aufgaben der rationalen Zahlen beschäftigen sich mit der holistischen Betrachtungsweise von Brüchen auf dem Zahlenstrahl, dem Vergrößern und Verkleinern durch Bruchzahlen beziehungsweise der Multiplikation mit Bruchzahlen und dem Aspekt des Anteils diskreter Ganzer.

### 6.1.1 Einbinden des Zahlenstrahls

#### Hintergrund

Sowohl Braithwaite & Siegler (2018) als auch Obersteiner et al. (2013) machen deutlich, dass viele Schüler\*innen Probleme bei der holistischen Betrachtungsweise von Brüchen haben (vgl. Kapitel 4.2.3). Diese getrennte Betrachtungsweise fällt laut den Autoren unter den *Natural Number Bias (NNB)*. Die robuste Repräsentation von Brüchen auf der Zahlengerade kann die holistische Betrachtungsweise laut Alibali & Sidney (2015) unterstützen. Auch Feijs et al. (2008, S. 75) sprechen sich für die Verwendung des Zahlenstrahls zur Visualisierung für Bruchzahlen aus. Durch das Einbinden eines Zahlenstrahls soll deutlich gemacht werden, dass es sich bei einer rationalen Zahl um *eine* Zahl handelt. Die rationalen Zahlen werden damit in ein bereits bekanntes Konzept eingebettet. Außerdem ist somit auch eine tragfähige Weiterverwendung für die reellen Zahlen gegeben.

#### Aufgabe 'Einzeichnen'

Die Grundidee dieses Teilaspekts der Lern-App besteht darin, dass Schüler\*innen einen zufälligen Bruch zwischen 0 und 2 erhalten und diesen als Punkt auf dem Zahlenstrahl einfügen müssen. Für die Aufgabe werden nicht nur Brüche  $< 1$  zur Betrachtung herangezogen, sondern auch unechte Brüche. Dadurch soll verdeutlicht werden, dass einerseits *unechte* Brüche als Zahlen ausdrückbar und dementsprechend auch am Zahlenstrahl zu finden sind. Zur Überprüfung des eingezeichneten Punktes auf dem Zahlenstrahl wird ein symmetrisch um die korrekte rationale Zahl liegendes Toleranzintervall herangezogen. Dieses Toleranzintervall variiert je nach ausgewählten Schwierigkeitsgrad (leicht, mittel, schwierig). In Abb. 6.1 ist die Aufgabe mit dem Bruch  $\frac{1}{2}$  dargestellt. Sowohl das Toleranzintervall als auch das unmittelbare Feedback für die Schüler\*innen sind erkennbar. Als Hilfestellung für diese Aufgabe können sich die Schüler\*innen die Unterteilungen des Zahlenstrahls entsprechend dem gewünschten Bruch anzeigen lassen. Dadurch wird wiederum auf die Grundvorstellung *Anteil eines Ganzen* (vgl. Kapitel 2.2.1) referenziert.

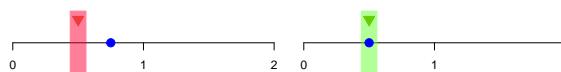


Abbildung 6.1: Aufgabe - Einzeichnen am Zahlenstrahl

#### Aufgabe 'Äquivalenz'

Der zweite Teil dieses Aspektes der Lern-App ist der implizite Aufbau des Äquivalenzklassenprinzips, wie ihn Padberg & Wartha (2017, S. 37) anhand des Zahlenstrahls aufzeigen (vgl. Kapitel 2.24). Es handelt sich um eine Denkaufgabe, wobei sich die Schüler\*innen – basierend auf ihren Erfahrungen mit Aufgabe 1 – überlegen sollen, was es bedeutet, wenn mehrere Brüche an derselben Stelle des Zahlenstrahls stehen können. Dies soll vor allem die Diskontinuität zwischen der eindeutigen Zahldarstellung der natürlichen Zahlen und den multiplen Repräsentationsmöglichkeiten von rationalen Zahlen nach Prediger (2007) aufzeigen. Durch das Erkennen dieser *Gruppierungen*

am Zahlenstrahl kann das formale und abstrakte Konzept der Äquivalenzklassen implizit initiiert werden. Diese Denkaufgabe wird in der Lern-App inkludiert, da das Verstehen der Gleichheit von Brüchen ein wesentlicher Faktor für die Rechenoperationen sowie beim Kürzen und Erweitern ist. Viele Fehler in diesen Bereichen lassen sich auf Unverständnis gegenüber der Gleichheit von Brüchen zurückführen (vgl. Kapitel 2.3.1).

### 6.1.2 Vergrößern und Verkleinern

Die Zahlbereichserweiterung der natürlichen Zahlen zu den rationalen Zahlen verändert einige der Grundvorstellungen bezüglich der Rechenoperationen (Reinhold & Reiss, 2020). Dazu gehört vor allem die Fehlvorstellung, dass die Multiplikation immer vergrößert. Diese fehlerhafte Vorstellung fällt laut Christou et al. (2020) und Roell et al. (2017) unter den *Natural Number Bias (NNB)* (vgl. Kapitel 4.2.1). Basierend auf Tabelle 4.2 wird der Aspekt des *Vergrößerns und Verkleinerns* herangezogen, um einerseits eine Kontinuität zwischen den natürlichen Zahlen und den rationalen Zahlen zu finden (Prediger, 2008) und andererseits die Multiplikation in den rationalen Zahlen zu thematisieren.

Hintergrund

Durch das Vergrößern und Verkleinern von Objekten sollen die Schüler\*innen den Umgang mit Skalierungsfaktoren beziehungsweise der Multiplikation einüben können. Dazu erhalten die Schüler\*innen eine Abbildung in Originalgröße und eine in der Größe veränderte Abbildung (vgl. Abb. 6.2). Die Aufgabe besteht darin, aus drei gegebenen Skalierungsfaktoren den richtigen Faktor auszuwählen. Die Skalierungsfaktoren sind dabei sowohl in Bruchschreibweise als auch in Dezimalschreibweise gegeben. Dadurch sollen die beiden Schreibweisen miteinander verbunden werden, sodass die Schüler\*innen diese nicht isoliert voneinander betrachten. Bei der Überprüfung der Antwort bekommen die Schüler\*innen unmittelbares Feedback und können – im Fall einer falschen Antwort – versuchen die richtige Antwort zu finden. Als Hilfestellung werden die Abbildungen in ein Quadrat gesetzt, sodass optische Vergleiche vereinfacht werden. Zusätzlich wird ein Zahlenstrahl mit eingezeichneten Unterteilung, welche dem Skalierungsfaktor entsprechen, angezeigt. Durch diese Hilfestellung fließt wiederum die Grundvorstellung des *Bruchs als Anteil* ein (vgl. Kapitel 2.2.1). Das Operatorkonzept ist durch die Verwendung der Multiplikation in dieser Aufgabe auch vertreten (vgl. Kapitel 2.1.1).

Aufgabe 'Skalierungsfaktor'

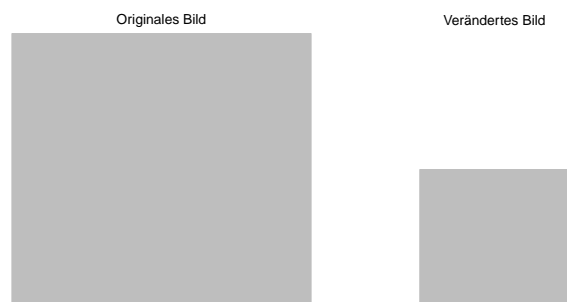


Abbildung 6.2: Aufgabe - Vergrößern und Verkleinern

### 6.1.3 Anteil diskreter Ganzer

#### Hintergrund

Laut Dewi et al. (2017) muss die Bedeutung von Bruchzahlen (*meaning of fractions*) in den Grundvorstellungen der Schüler\*innen verankert sein, sodass sowohl das Verständnis für die rationalen Zahlen als auch deren Rechenoperationen möglich wird. Die Anteilssicht der Bruchzahlen ist laut Cortina et al. (2014) ein gangbarer Weg, um dieses Verständnis zu erreichen. Jedoch geben die Autoren an, dass durch die Verwendung von teilbaren Objekten dieser Ansatz Limitationen auferlegt bekommt. Basierend auf diesen Überlegungen wird ein diskretes Ganzes (Schink & Meyer (2013)) herangezogen. Dadurch können implizit die typischen Schülerfehler beim Repräsentieren (vgl. Tabelle 2.2) aufgegriffen werden.

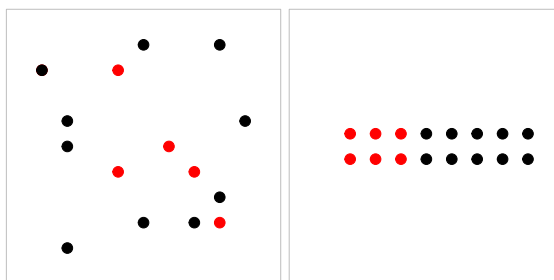


Abbildung 6.3: Aufgabe - Anteil diskreter Ganzer

#### Aufgabe 'Markieren'

Auch Fauzi & Suryadi (2020) sehen im fehlenden Verständnis des Bruches als Anteil eines (diskreten) Ganzen eine *epistemologische Denkhürde*. Durch die Verwendung eines diskreten Ganzen, welches durch eine Menge an Punkten repräsentiert wird, soll die Anteilsvorstellung von den kontinuierlichen Ganzen zu den diskreten Ganzen erweitert werden. Die Schüler\*innen erhalten dazu einen Bruch zwischen  $\frac{1}{12}$  und 1 und eine Menge an Punkten. Die Anzahl der Punkte ist dabei ein zufällig generiertes Vielfaches des Nenners. Dadurch sollen die Schüler\*innen noch stärker das diskrete Ganze fokussieren, da die Aufgabe nicht mehr *nur* darin besteht so viele Punkte zu markieren, wie der Nenner vorgibt. Der Fokus der Aufgabe liegt daher stark auf der Frage *Was kann als Ganzes betrachtet werden?*. Bei der Überprüfung der Antwort bekommen die Schüler\*innen unmittelbares Feedback und können – im Fall einer falschen Antwort – versuchen die richtige Antwort zu finden. Als Hilfestellung wird die Menge an Punkten systematisch und geordnet in Gruppierungen dargestellt, dabei wird als Basis der Zähler verwendet. In Abb. 6.3 ist das diskrete Ganze zum Auffinden von  $\frac{3}{8}$  dargestellt. Links ist die standardmäßige Aufgabe visualisiert und rechts die Hilfestellung mit den Clustern.

## 6.2 Bereich Prozentzahlen

Für das prototypische Modell der Lern-App wurden für den Bereich der Prozentzahlen zwei unterschiedliche Aufgaben entwickelt. Alle Aufgaben sind dabei interaktiv und warten aufgrund der Randomisierung mit einer großen Anzahl an Übungsmöglichkeiten auf. Die Aufgaben der Prozentzahlen beschäftigen sich einerseits mit der Betrachtung der Prozente als *Anteil eines Ganzen* und andererseits mit dem Zusammenspiel der drei formalbezogenen Konzepte.



### 6.2.1 Einbinden des Prozentstreifens

Sowohl Gudladt (2021, S. 10) als auch Pöhler (2018, S. 16) sprechen von drei zentralen formalbezogenen Konzepten bei den Prozentzahlen beziehungsweise der Prozentrechnung. Dazu zählen der Grundwert, der Prozentwert und der Prozentsatz (vgl. Kapitel 3.1). Ein wichtiger Erkenntnissschritt bezüglich des Verstehensprozesses von Prozenten ist das Zusammenspiel dieser drei Konzepte. Das Aufgreifen des Zusammenspiels soll auch die typischen Schülerfehler des *Gleichsetzens von Prozentzahlen mit Einheiten* (Gudladt, 2021, S. 57) oder dem falschen beziehungsweise *nicht tragfähigen Umgang mit dem Prozentzeichen* (Pöhler, 2018, S. 30; Rosenthal et al., 2009) entgegenwirken (vgl. Kapitel 3.3.1). Implizit wird bei dieser Aufgabe die Grundvorstellung *Prozente als Anteile*, welche äquivalent zu *Bruch als Anteil* ist, mitbedacht. Laut Feijs et al. (2008, S. 93) wirkt sich die Verwendung von Prozentstreifen positiv auf das Ausbilden dieser Grundvorstellung aus. Aus diesem Grund werden Prozentstreifen für das Verstehen des Zusammenspiels der drei Konzepte verwendet.

Hintergrund

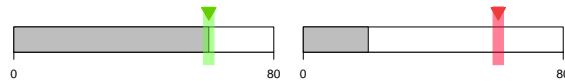


Abbildung 6.4: Aufgabe - Einzeichnen am Prozentstreifen

In der Aufgabe wird – wie von Feijs et al. (2008) vorgeschlagen – ein Prozentstreifen verwendet. Dadurch soll die Verbindung zwischen den drei formalbezogenen Konzepten visualisiert werden. Weiters kann der Prozentstreifen in abstrahierter Form mit dem Zahlenstrahl in Verbindung gebracht werden. Dadurch wird der Prozentstreifen wiederum in ein tragfähiges Konzept eingebettet. Die Schüler\*innen erhalten einen Prozentsatz ( $p$ ) und einen Grundwert ( $G$ ) als Angabe und sollen diese Situation am Prozentstreifen einzeichnen. Dabei kann der Prozentsatz über 100% hinausgehen, da laut Pöhler (2018, S. 30) die Schüler\*innen bei der Grundvorstellung *Prozente als Anteile* Prozentsätze über 100% nicht als solche anerkennen. In Abb. 6.4 ist die Aufgabe zu 75% von 80 dargestellt. Zusätzlich gibt es einen höheren Schwierigkeitsgrad der Aufgabe, welcher dadurch realisiert wird, dass nicht der (vermehrte) Grundwert ( $\max\{G, G \cdot p\}$ ) als maximaler Wert am Prozentstreifen eingetragen ist, sondern ein zufällig generierter höherer Wert. Diese zusätzliche Schwierigkeit stellt die Frage nach dem Grundwert in den Vordergrund. Bei der Überprüfung der Antwort bekommen die Schüler\*innen unmittelbares Feedback. Im Falle einer falschen Antwort wird die korrekte Antwort am Prozentstreifen eingezeichnet, sodass die Schüler\*innen darüber reflektieren können (vgl. Abb. 6.4). Als Hilfestellung können sich die Schüler\*innen sowohl eine Skalierung in 10%-Schritten als auch in 10er-Schritten anzeigen lassen. Beim erhöhten Schwierigkeitsgrad ist es zusätzlich möglich, dass der Grundwert eingezeichnet wird.

Aufgabe 'Einzeichnen'

### 6.2.2 Zusammenspiel von Grundwert, Prozentwert und Prozentsatz

Laut Hafner (2012, S. 91) ist der *Zuordnungsfehler bei Größen* einer der vier zentralen Fehlerquellen der Prozentrechnung. Beim *Zuordnungsfehler* werden die Zahlen der Aufgabenstellung den falschen formalbezogenen Konzepten (vgl. Kapitel 3.1) zugeordnet (Hafner, 2012, S. 91). Beispielsweise wird der Prozentwert als Grundwert gedeutet. Buchholtz et al. (2016) sprechen in diesem Fall von einer unreflektierten Anwendung mathematischen „Wissens“. Laut Heinrichs (2015, S. 146) gehört zum *Zuordnungsfehler bei Größen* auch das fehlende Verständnis von Prozentwerten im Vergleich

Hintergrund

zu Absolutwerten und das fehlende Bewusstsein über die Bedeutung des Grundwertes in der Prozentrechnung. Die Aufgabe stellt wiederum die Grundvorstellung der *Prozente als Anteile* in den Vordergrund und versucht durch die Verwendung von Prozentsätzen kleiner und größer 100% die Limitationen dieser Grundvorstellung laut Pöhler (2018, S. 30) zu umgehen.

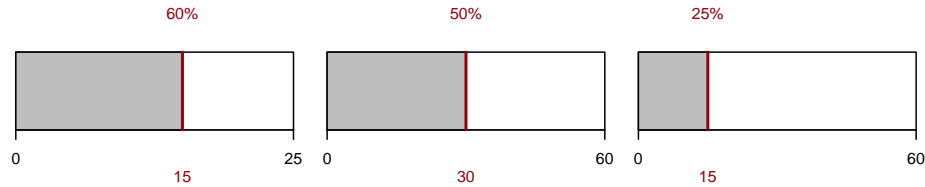


Abbildung 6.5: Aufgabe - Auswahl des Prozentstreifens

#### Aufgabe 'Auswählen'

Bei dieser Aufgabe erhalten die Schüler\*innen eine Angabe, welche entweder einen Prozentsatz und den Grundwert ( $p$  &  $G$ ) oder einen Anteil und einen Grundwert ( $A$  &  $G$ ) beschreibt. Zusätzlich werden drei Prozentstreifen dargestellt und die Schüler\*innen müssen auswählen, welcher Prozentstreifen die Angabe modelliert. Dadurch greift die Aufgabe den *Zuordnungsfehler bei Größen* auf, da die korrekte Auswahl des Prozentstreifens darauf abzielt die Situation richtig zu modellieren und die Größen korrekt zuzuordnen. Durch die Variation der Angabe wird unter anderem der Schülerfehler des *falschen oder nicht tragfähigen Umgangs mit dem Prozentzeichen* nach Pöhler (2018, S. 30) und Rosenthal et al. (2009) implizit mitbedacht (vgl. Kapitel 3.3.1). Weiters wird durch die Verwendung von Prozentsätzen kleiner und größer 100% sowohl der verminderte als auch der vermehrte Grundwert abgebildet. Die Aufgabe ist so konzipiert, dass zur richtigen Lösung auch immer die invertierte Form dargestellt wird. Beispielsweise ist bei der Aufgabe 25% von 60 auch der Prozentstreifen zu 60% von 25 dargestellt. Dies soll verhindern, dass die Schüler\*innen ihre Auswahl rein über das Vorhanden-Sein der *richtigen* Zahlen treffen, sondern dass ein Denkprozess vorhanden ist. Wiederum erhalten die Schüler\*innen unmittelbares Feedback auf ihre Lösung und können im Falle einer falschen Antwort die Aufgabe nochmals lösen. Die Hilfestellung bei dieser Aufgabe ist die verschriftlichte Analyse des Beispiels.

# Kapitel 7

## Technische Umsetzung der Lern-App

In diesem Kapitel wird der *Entwurf* und die *Implementierung* der Lern-App beschrieben. Dabei werden vor allem die generellen Konzepte hinter der Modellierung und der technischen Umsetzung der Software einfließen. Zum *Entwurf* der Lern-App zählt unter anderem das Design der Benutzeroberfläche (*General User Interfaces*). Durch diese Entscheidungen entsteht eine Basis für das Screendesign (Liebal & Exner, 2011, S. 124). Zusätzlich wird ein Fokus auf die Modularisierung der App gelegt. Dadurch soll sowohl die Erweiterung als auch die Wartbarkeit der App vereinfacht werden.

Der Zugang zur Lern-App soll möglichst problemlos und ohne weitere Hürden möglich sein. Aus diesem Grund wird davon Abstand genommen, die App proprietär vermarkten zu wollen. Im Sinne des offenen Bildungszugangs für alle, soll die App eine weitere offen zugängliche und kostenfreie Lernresource darstellen. Die Lern-App wird somit als webbasierte App realisiert, welche ohne Installation in allen gängigen Browsern nutzbar ist. Ein weiterer Vorteil einer Web-App ist, dass die Rechenleistung vom lokalen Gerät zum Server hin verschoben wird. Weiters ist für die Nutzung der App weder eine Anmeldung noch das Erstellen eines Benutzerkontos nötig. Dieser offene und einfache Zugang zur Lern-App ermöglicht auch einen spontanen Einsatz im Unterricht. Die entwickelte Lern-App ist unter dem Link <https://fachdidaktik-mathematik.uibk.ac.at/shiny/thesis/mathe-bruno/> abrufbar.

Bereitstellung der App

Da die Implementierung der entwickelten Lern-App von der Programmiersprache abhängt, wird diese kurz beschrieben. *R Shiny* ist eine Erweiterung von *R*, welche die Entwicklung von interaktiven Web-Apps ermöglicht (Chang, 2021a). Laut Wickham (2021) wurde *R Shiny* vor allem für *Data Scientists* entwickelt und aus diesem Grund können die Apps ohne HTML-, CSS- oder JavaScript-Komponenten erstellt werden. Auf der anderen Seite erlaubt *Shiny* das Anpassen der Komponenten der Benutzeroberfläche (Wickham, 2021), wobei HTML, CSS oder JavaScript genutzt werden kann (Chang, 2021a). *R Shiny* erlaubt eine schnelle und bidirektionale Kommunikation zwischen dem Web-Browser und *R* (Chang, 2021a). Ein weiterer Vorteil von *R Shiny* ist laut Chang (2021a) die Verwendung von *reactive Programming*, was den *event handling Code* reduziert. Für die Veröffentlichung von *R Shiny*-Apps wird ein *Shiny Server* benötigt (Chang, 2021a).

R Shiny

Pseudozufallszahlen

Die in Kapitel 6 angesprochene Randomisierung der Aufgaben erfolgt vor allem durch die Randomisierung der angegebenen Bruch- beziehungsweise Prozentzahlen und deren Bezugsgrößen. Bei computererzeugten „Zufallszahlen“ spricht man zutreffender von *Pseudozufallszahlen* (Büchter & Henn, 2005, S. 295). „Wenn sich diese Zahlen jedoch erst nach einer sehr großen Periode wiederholen und wenn sie ‘zufällig genug’ verteilt sind, so sind sie für praktische Probleme als Zufallszahlen einsetzbar“ (Büchter & Henn, 2005, S. 295). Der standardmäßig verwendete Algorithmus zur Erzeugung von Pseudozufallszahlen in *R* ist *Mersenne-Twister*, welcher auch in der Lern-App verwendet wird. Die Realisierung von Bruchzahlen in bestimmten Intervallen wird im Code folgendermaßen ausgeführt:

```
reactVals$denominator = sample(2:12,1)
reactVals$numerator = sample(0:(2*reactVals$denominator),1)
```

Im Codebeispiel ist die zufällige Generierung eines Bruches im Intervall  $[0; 2]$  dargestellt. Dafür wird zunächst der Zähler (`reactVals$denominator`) generiert und in einem `reactiveValue()` gespeichert, sodass dieser Wert einerseits auf Änderungen reagiert und andererseits von anderen Funktionen angesprochen werden kann. Der Nenner (`reactVals$numerator`) wird dann in Abhängigkeit vom Zähler generiert, wobei eine zufällige natürliche Zahl zwischen 0 und  $2 \cdot \text{denominator}$  gewählt wird.

## 7.1 Design

In diesem Kapitel wird die Entwicklung des allgemeinen Screendesigns – der Benutzeroberfläche – beschrieben. Zusätzlich wird exemplarisch der Entwurf des *General User Interface (GUI)* für eine ausgewählte Aufgabe dargestellt. Dieses Kapitel fokussiert rein auf das Erscheinungsbild der Lern-App und ist nicht mit dem Design von Lernumgebungen gleichzusetzen. Das Design der Aufgaben und der entsprechenden Funktionalitäten ist in Kapitel 6 zu finden.

### 7.1.1 Entwicklung des Screendesigns

grundlegendes Layout

Das grundlegende Layout der Lern-App ist minimalistisch gehalten, sodass es durch das Design keine Ablenkung vom eigentlichen Lerninhalt gibt. Ähnliche Überlegungen gibt Reinhold (2019, S. 279) an und verbindet diese mit der *Cognitive Load Theory*: Die kognitive Belastung beim Lernen komplexer Sachverhalte kann durch die Gestaltung der Lernumgebung reduziert werden. Basierend auf diesem Ansatz werden keine ablenkenden oder störenden Animationen in der Lern-App verwendet, sondern nur gezielte interaktive Grafiken. Weiters ist die Lern-App mittels einer Menüleiste in verschiedene Unterpunkte aufgeteilt. Dadurch ist es möglich, dass sich jeder Unterpunkt auf eine spezifische Aufgabe oder einen Themenschwerpunkt beschränkt und nicht die gesamte Fülle des Inhalts auf einer Seite präsentiert wird. Dabei bilden die Bruch- und die Prozentrechnung jeweils Hauptpunkte im Menü und die jeweiligen Aufgaben werden unter diese Hauptpunkte subsumiert.

Nutzung von Farben und Icons

Der *Cognitive Load Theory* folgend ist auch der Einsatz von Farben eher beschränkt. Laut Liebal & Exner (2011, S. 125) ist sowohl eine einheitliche Farbgebung als auch der Kontrast bei Software für

Schüler\*innen wichtig. Aus diesem Grund werden für die unterschiedliche Buttons, wie beispielsweise zum Anzeigen von Hilfen oder Lösungen, immer die gleiche Farbe verwendet (vgl. Abb. 7.1). Dadurch ist rein optisch schon die Funktionalität des jeweiligen Buttons deutlich.



Abbildung 7.1: Definition der Farben

Um Aufgaben oder Fragen explizit zu kennzeichnen und von Erklärungstexten abzugrenzen, werden vordefinierte Icons verwendet. Weiters wird in der Lern-App sehr viel Wert auf typografischen Weißraum gelegt, sodass zwischen den einzelnen Elementen der Lern-App genügend Freiraum ist. Dadurch wirkt die Lern-App nicht überfüllt und stimmt wiederum mit der *Cognitive Load Theory* überein.

Durch den starken Fokus der Lern-App auf mathematische Inhalte respektive deren *epistemologischen Denkhürden* ist das Darstellen der mathematischen Ausdrücke besonders essenziell. In der Lern-App wird eine durchgängige Verwendung der Bruchschreibweise, wie diese für die Schüler\*innen bereits bekannt ist, fokussiert. Ein Hauptaugenmerk liegt darauf, dass Brüche in der Form  $\frac{3}{4}$  und nicht als  $3/4$  dargestellt werden. Durch die Darstellung der mathematischen Ausdrücke soll keine weitere Hürde oder ein weiterer kognitiver Aufwand für die Schüler\*innen hinzugefügt werden. Die bekannten Schreibweisen sollen Sicherheit bieten und durch die permanente Verwendung verinnerlicht werden.

Darstellung mathematischer Ausdrücke

Wie bereits erwähnt, spricht die Lern-App sowohl die Schüler\*innen als auch die (zukünftigen) Lehrpersonen an. Basierend auf dieser Anforderung wurden zwei grundsätzliche Layouts entwickelt. Das Layout, welches die Aufgaben betrifft und vornehmlich für Schüler\*innen gedacht ist, erfüllt die oben beschriebenen Guidelines beim Layout. Das Layout zu den didaktischen Hintergründen führt sowohl die Aufgabe als auch die Erklärungen und Theorien zusammen. In Abb. 7.2 sind beide Layouts abstrakt dargestellt.

Aufgaben und Didaktik

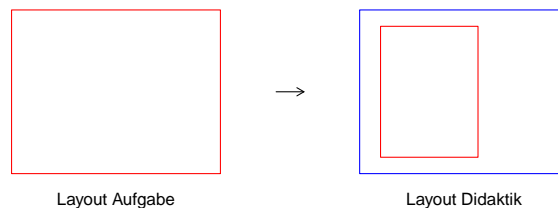


Abbildung 7.2: Definition der Layouts

Es ist ersichtlich, dass das Layout der Schüler\*innensicht beziehungsweise der Aufgabe in das Layout der didaktischen Hintergründe integriert wird. Dadurch wird ermöglicht, dass die interaktiven Parts der Lern-App auch in den didaktischen Teilbereichen funktionieren und die Lehrpersonen sowohl die Aufgabe lösen können als auch die didaktischen Hintergrundüberlegungen zur Hand haben.

Hartl (2013, S. 28) gibt als Guideline an, dass eine freundliche Leitfigur die Schüler\*innen durch eine

Lernbegleiter Bruno

Lern-App führen sollte, da diese eine stärkere Bindung zur Lern-App initiieren kann. Eine solche Leitfigur kann als Freund des Kindes agieren und als soziale Bezugsperson dienen (Hartl, 2013, S. 28; Liebal & Exner, 2011, S. 182). Weiters gibt Hartl (2013, S. 28) an, dass Kinder gleichgeschlechtlichen Charakteren mehr Aufmerksamkeit schenken. Für die Lern-App wurde ein eigener Charakter design, welcher eine tierische Form hat, um das Dilemma der gleichgeschlechtlichen Charaktere nicht zu offensichtlich zu machen. In Abb. 7.3 ist der entwickelte Charakter *Bruno* dargestellt.



Abbildung 7.3: Lernbegleiter Bruno

*Bruno* wurde als Vektorgrafik angelegt, sodass Skalierungen der Figur ohne Verzerrungen oder Unschärfen möglich sind. Die Figur wurde selbst erstellt und kann dadurch problemlos in der Lern-App, ohne Bildrechte zu verletzen, verwendet werden.

### 7.1.2 Entwurf der GUI

Entwurf exemplarisch	Bei der Beschreibung des Entwurfsprozesses des <i>General User Interfaces (GUI)</i> wird exemplarisch eine Aufgabe der Lern-App näher beschrieben. Die beschriebene Aufgabe behandelt den <i>Anteil diskreter Ganzer</i> und entspricht in seiner Funktionalität der definierten Vorgaben aus Kapitel 6.1.3. Alle weiteren Aufgaben wurden analog bearbeitet und deren Entwurf der GUI sind im Anhang zu finden.
Aufbau der Tabs	Da es sich bei der Lern-App um eine GUI-lastige Anwendung handelt, ist der Entwurf des <i>General User Interfaces</i> ein wichtiger Punkt im Entwurfs- und Implementierungsprozess. Das grundlegende Design, welches sich durch die gesamte Lern-App zieht, ist bereits in Kapitel 7.1 näher beschrieben. Diese Designentscheidungen fließen beim Entwurf und der späteren Implementierung ein. Auch die Aufgabe <i>Anteil diskreter Ganzer</i> (vgl. Kapitel 6.1.3) folgt diesem Schema. In Abb. 7.4 ist der Rohentwurf der GUI visualisiert. Im Rohentwurf sind sowohl die definierte Farbgebung der Buttons sowie das reduzierte Design der unterschiedlichen Elemente ersichtlich.
Beschreibung der Elemente	Die Beschreibung der Elemente und ihre Abhängigkeiten untereinander sind wesentliche Bestandteile des Modellierungsprozesses. Die Elemente für die Aufgabe <i>Anteil eines diskreten Ganzen</i> werden im Folgenden kurz umrissen. <ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Überschrift und Erklärungstext:</b> Dabei handelt es sich um reine Textbausteine, welche keinen weiteren Input benötigen. Weiters sind bei diesem Element keine Abhängigkeiten gegeben, da sowohl die Überschrift als auch der Erklärungstext statisch sind und keinen Veränderungen unterliegen.</li> </ul>

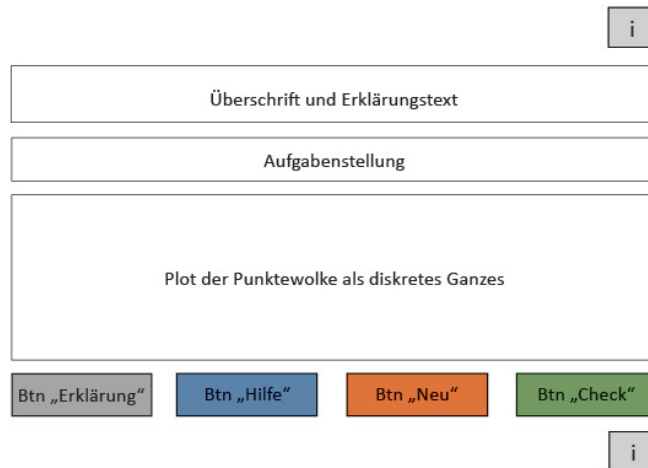


Abbildung 7.4: Rohentwurf der GUI zur Aufgabe 'Anteil diskreter Ganzer'

- **Aufgabenstellung:** Bei der Aufgabenstellung handelt es sich um einen veränderbaren Text, welcher auf Input reagiert. Die Aufgabenstellung kann durch Klick auf den Button *Neue Aufgabe* geändert werden. Der dynamische Text stellt bei jeder neuen Aufgabe den jeweiligen Bruch dar.
- **Plot der Punktwolke als diskretes Ganzes:** Im Plot der Punktwolke wird ein Ganzes anhand einer Menge von Punkten – diskreter Fall des Ganzen – visualisiert. Die Anzahl der Punkte hängt vom in der *Aufgabenstellung* gegebenen Bruch ab. Dieser Plot reagiert sowohl auf *Click-* als auch *Brush-Events* und ist dementsprechend interaktiv. Weiters reagiert der Plot auf jeden markierten Punkt, indem der Punkt die Farbe ändert. Der Plot reagiert einerseits auf *Click-Events* des Buttons *Neue Aufgabe*, da in diesem Fall die Anzahl der Punkte angepasst werden muss. Andererseits hat der Button *Hilfe* auch Einfluss, da die Darstellung der Punkte geändert wird.
- **Button Erklärung:** Dieser Button öffnet ein *Pop-Up-Fenster*, welches die Aufgabe anhand eines statischen Beispiels näher erklärt. Dieses Element benötigt keinen weiteren Input und ist nicht von anderen Elementen abhängig.
- **Button Hilfe:** Der Button *Hilfe* beeinflusst den *Plot der Punktwolke als diskretes Ganzes*, da er die Punkte in strukturierter Form (in Clustern) anzeigen lässt.
- **Button Neue Aufgabe:** Durch Klick auf diesen Button wird eine neue Aufgabe kreiert. Dieser Button beeinflusst die *Aufgabenstellung* und den *Plot der Punktwolke als diskretes Ganzes*, da diese basierend auf dem neuen Bruch verändert werden. Weiters setzt er die Hilfestellung (Button *Hilfe*) zurück, falls diese bei der letzten Aufgabe aktiviert wurde. Auch das Feedback über die korrekte oder falsche Lösung (Button *Überprüfen*) wird zurückgesetzt.
- **Button Überprüfen:** Der Button *Überprüfen* kontrolliert die Lösung der Schüler\*innen, indem der Anteil der markierten Punkte mit dem Bruch der *Aufgabenstellung* verglichen werden. Daraufhin wird ein unmittelbares Feedback für die Schüler\*innen erstellt, indem die Punkte grün gefärbt werden, falls die Lösung korrekt ist. Zusätzlich gibt es eine textuelle

Meldung zur Lösung der Aufgabe. Dieser Button benötigt die markierten Punkte des *Plot der Punktwolke als diskretes Ganzes* und den Bruch der *Aufgabenstellung* zur Auswertung und ist dementsprechend abhängig von ihnen. Gleichzeitig beeinflusst der Button den *Plot der Punktwolke als diskretes Ganzes* durch das Umfärben der Punkte.

- **Button i:** Der Informationsbutton ist sowohl oberhalb als auch unterhalb der eigentlichen Aufgabe platziert. Rein formal handelt es sich dabei um zwei unterschiedliche Elemente, welche jedoch dieselbe Funktionalität aufweisen. Der Informationsbutton verlinkt zum *Tab* der didaktisch aufbereiteten Aufgabe. Der Button hat keine weiteren Abhängigkeiten zu anderen Elementen.

Diese Beschreibung stellt grob die Interaktion und Funktionalität der GUI-Elemente dar. Die Implementierung benötigt weitere Funktionen und Abhängigkeiten, welche in dieser kurzen Übersicht nicht gegeben werden. In Abb. 7.5 ist das *general user interface* zur Aufgabe *Anteil diskreter Ganzer* in implementierter Form dargestellt.

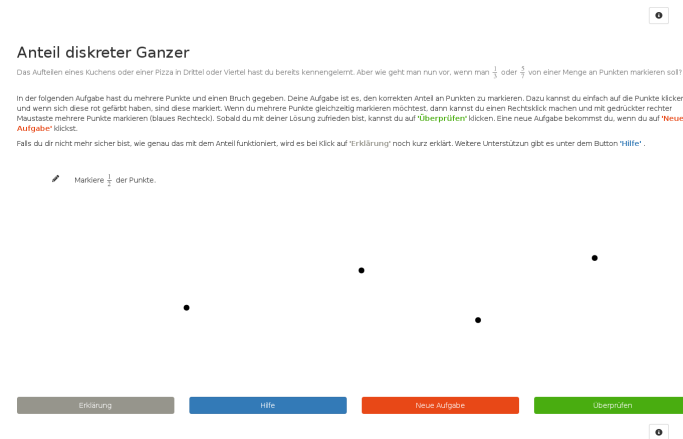


Abbildung 7.5: GUI zur Aufgabe 'Anteil diskreter Ganzer'

## 7.2 Modularisierung

Das Entwickeln eines prototypischen Modells einer Lern-App erfordert eine flexible und dennoch stabile Konzeption der App. Um den Aspekten der Wartbarkeit und Erweiterbarkeit gerecht zu werden, wird das Konzept der Modularisierung herangezogen. Im folgenden Kapitel ist einerseits die grundlegende Konzeption der Modularisierung und der Module beschrieben und andererseits wird auf der Basis von *R Shiny* die Realisierung während der Implementierung dargestellt.

### 7.2.1 Grundlegende Konzeption

Grundüberlegung

Gute Wartbarkeit oder auch Erweiterbarkeit benötigen einen gut strukturierten Code, welcher



offen gegenüber Erweiterungen, aber geschlossen gegenüber Modifikationen ist. Dieses Verhalten referenziert bei den *SOLID-Principles* das *Open-Closed-Principle* (Madasu et al., 2015). Da die entwickelte Lern-App einen prototypischen Modellcharakter besitzt, wird diese Eigenschaft des Codes als essenzieller Aspekt gedeutet. Um diese Wart- und Erweiterbarkeit zu erhalten, wird die Funktionalität der Lern-App in unterschiedliche Module eingeteilt. Die Module behandeln jeweils einen Teilaspekt der Lern-App und sollen in ihrer Gesamtheit die geforderte Funktionalität der Lern-App abdecken. Durch die Verwendung von Modulen wird der Code gekapselt und kann dadurch wiederverwendet werden.

Der Aufbau der Lern-App in den Bereich der Bruch- und der Prozentrechnung gibt bereits eine Struktur vor. Wie in Abb. 7.6 ersichtlich stellen die beiden Bereiche Module dar. Weiters ist jeder Teilaspekt des mathematischen Lerninhalts (vgl. Kapitel 6) wiederum ein in sich gekapseltes Modul. Somit setzt sich der Bereich *Bruchrechnung* beispielsweise aus den Modulen *Zahlenstrahl*, *Verkleinern und Vergrößern* und *Anteil mehrerer Ganzer* zusammen. In Abb. 7.6 sind auch die didaktischen Inhalte zu jedem Teilaspekt als Modul abgebildet. Um dem geplanten Layout aus Abb. 7.2 Genüge zu tun, beinhaltet jedes Didaktik-Modul das Modul der Aufgabenstellung. Hier wird auch deutlich, dass das gewählte Design ohne Module nicht effizient umgesetzt hätte werden können. Da ohne Module sehr viele Codeduplikate nötig gewesen wären, was sowohl die Wartbarkeit wie auch die Erweiterbarkeit stark eingeschränkt hätte.

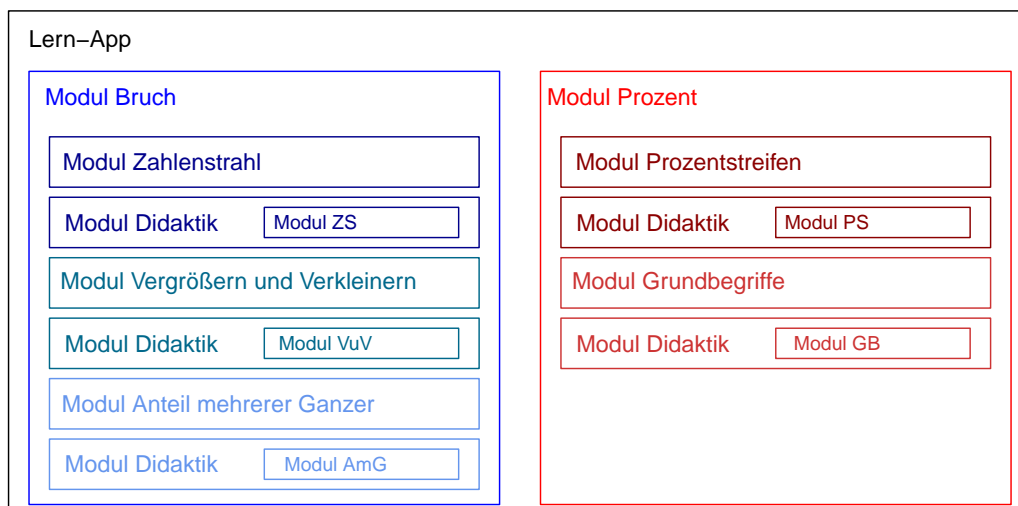


Abbildung 7.6: Definition der verwendeten Module

Der modularisierte Ansatz in Abb. 7.6 zeigt auch die einfache Erweiterbarkeit der Lern-App durch zusätzliche Themenbereiche – durch Einfügen eines weiteren Moduls auf Ebene der Bruch- und Prozentrechnung – beziehungsweise Aufgaben in den bestehenden Bereichen – durch ergänzende Module in den jeweiligen Bereichen. Durch diesen Aufbau ist die Entwicklung einer prototypischen Lern-App möglich.

Bereits erwähnte Vorteile des modularisierten Ansatzes sind die einfache Wartbarkeit und Erweiterbarkeit des Codes. Weiters können Module nach dem *Open-Closed-Principle* erweitert werden, ohne dass weitere Modifikationen im bestehenden Code notwendig werden. Durch die Kapselung in

Module sind auch mehrfache Aufrufe eines Moduls ohne Codeduplikationen möglich. So kann beispielsweise das Layout aus Abb. 7.2 in einfacher Weise realisiert werden. Ein weiterer Vorteil bei der Nutzung von Modulen ist die Übersichtlichkeit des Codes, da die Funktionalität auf mehrere Source-Dateien aufgeteilt wird. Durch das Einbeziehen von sauberen Schnittstellen zwischen den Modulen erhält die Entwicklung der Lern-App ein höheres Komplexitätslevel, jedoch führt es schließlich zu Erleichterungen beim Programmieren.

## 7.2.2 Realisierung der Modularisierung

### Shiny Modules

Die Modularisierung in *R Shiny* erfolgt mittels *Shiny Modules*. Neben dem *Namespacing* sind weitere große Vorteile der Module, dass der Code einerseits individuell im Modul getestet werden kann und andererseits das Wiederverwenden von Code in einfacher Weise ermöglicht (Wickham, 2021). Laut Wickham (2021) bestehen Module in ihrer einfachsten Form aus einer Menge von UI- und Server-Funktionen. Analog zu einer standardmäßigen *Shiny App* bestehen Module somit aus einer `module UI`-Funktion, welche die Benutzeroberfläche spezifiziert, und einer `module server`-Funktion, welche die Funktionalität bestimmt (Wickham, 2021). Weiters helfen *Shiny Modules* dabei, den Code zu strukturieren und die Komplexität zu reduzieren, sodass die App sowohl erweiterbar als auch wartbar bleibt. Für das Ziel eines modellhaften Prototypen der Lern-App eignen sich deshalb die *Shiny Modules* besonders.

### Namespace

Wie bereits erwähnt gehört das *Namespacing* zu den Vorteilen der *Shiny Modules*. In einer *Shiny App* müssen alle Namen (`id`) der verwendeten Objekte global eindeutig sein (Wickham, 2021). Je größer und komplexer die App wird, desto schwieriger ist das Finden von geeigneter Namen für alle `controls`. Die Module ermöglichen es, Bedienelemente zu erstellen, welche nur innerhalb des Moduls gesehen werden. Dieses Verhalten nennt man *Namespacing*, da die Module eigene Bereiche für die Benennung der Bedienelemente schaffen, welche isoliert zu den Bereichen der anderen Module sind (Wickham, 2021). Durch das *Namespacing* konnten in der Lern-App für dieselbe Funktionalität derselbe Namen vergeben werden. So wird beispielsweise jeder *Erklärung*-Button mittels `smallHelp` angesprochen. Die Lesbarkeit des Codes wird dementsprechend erhöht, da die Zuordnung der Funktionalität zu den jeweiligen Bedienelementen einfach nachvollziehbar und verständlich ist.

### moduleServer()

*Shiny Modules* wurden zunächst mit dem Aufruf `callModule()` eingeführt. Mit dem Update auf *Shiny 1.5.0* (Juni 2020) wurde die Funktion `moduleServer()` hinzugefügt (Wickham, 2021). Der Entwickler des *Shiny Packages* Chang (2021a) empfiehlt die Verwendung von `moduleServer()`, da einerseits die Syntax leichter verständlich ist und andererseits der `moduleServer` mit `testServer()` getestet werden kann. Der Funktionsaufruf von `moduleServer()` generiert automatisch den *Namespace*. Der Aufbau des Moduls mit `moduleServer()` erfolgt beispielsweise für das Modul `numberLineModule` wie folgt:

```
numberLineModuleUI <- function(id){
  ### Definition der Bedienelemente der GUI
}

numberLineModuleServer <- function(id){
  moduleServer(id,
```

```

        function(input, output, session){
          ### Code für Funktionalität des Moduls
        }
      )
}

```

Im Codebeispiel ist die Aufteilung in UI-Elemente (`numberLineModuleUI()`) und die Funktionalität (`numberLineModuleServer()`) gut ersichtlich. Das Zusammenspiel der beiden Komponenten wird über die übergebene `id` realisiert, wobei diese beim Aufruf von der UI-Funktion und der Server-Funktion gleich sein sollte. Das Aufrufen des Moduls in einer *Shiny App* erfolgt auf einfache Weise durch:

```

library(shiny)
source("numberLineModule.R")

ui <- fluidPage(
  numberLineModuleUI("numberLine")
)

server <- function(input, output, session){
  numberLineModuleServer("numberLine")
}

shinyApp(ui, server)

```

Die von Chang (2021a) angesprochene leicht verständliche Syntax des Modulaufrufs ist im obigen Codebeispiel offensichtlich. Ein weiterer Vorteil der *Shiny Modules* ist, dass diese ineinander geschachtelt werden können. Dadurch wird die geplante Modularisierung (vgl. Abb. 7.6) realisierbar.

Weiters wird das geplante Layout der didaktisch aufbereiteten Erklärung aus Abb. 7.2 durch die Verwendung der *Shiny Modules* möglich. Das vollständig ausprogrammierte Modul der jeweiligen Aufgabe (vgl. Kapitel 6) wird im zugehörigen Modul aufgerufen und mit einer didaktischen Erklärung versehen. So wird beispielsweise das Modul `numberLineModul`, welches das Einzeichnen von Brüchen auf einem Zahlenstrahl realisiert, vollständig implementiert und wie folgt im korrespondierenden Didaktik-Modul `numberLineDidacticModul` aufgerufen:

```

library(shiny)
source("numberLineModule.R")

numberLineDidacticModuleUI <- function(id){
  ns = NS(id)
  fluidPage(
    fluidRow(
      column(8, style = "border: 2px solid grey;",
             numberLineModuleUI(ns("numberLine")))
    )
  )
}

```

Aufgaben- und  
Didaktik-Modul

```

    ),
    column(4,
      ### Bedienelemente und Erklärungstexte des Didaktik-Moduls
    )
  )
}

numberLineDidacticModuleServer <- function(id){
  moduleServer(id,
    function(input, output, session){
      numberLineModuleServer("numberLine")
    }
  )
}

```

Das Layout aus Abb. 7.2 wird dadurch realisiert, dass  $\frac{2}{3}$  der Seite für das `numberLineModule` beziehungsweise andere Aufgaben-Module reserviert ist und das letzte Drittel die Erklärungstexte sowie weiterführende Literatur enthält. Durch den Aufruf des Aufgaben-Moduls haben die (angehenden) Lehrpersonen die Möglichkeit die jeweiligen Aufgaben parallel zum Erklärungstext zu lösen. Dadurch soll die didaktische Erklärung direkt mit der Aufgabe verbunden werden, ohne dass ein Mehraufwand durch ständiges Wechseln der Tabs vorhanden ist.

### 7.3 Entwurfsentscheidungen und Konzepte

In diesem Unterkapitel werden die wichtigsten Entwurfsentscheidungen und Konzepte für die Entwicklung beziehungsweise Implementierung der Lern-App kurz umrissen. Die vorgestellten Konzepte und Entscheidungen haben maßgeblich zur Entwicklung der Lern-App beigetragen. Kleine, unerhebliche Entscheidungen werden dabei nicht berücksichtigt.

Tabs und Menu

Um den *Cognitive Load* der Lern-App möglichst gering zu halten, wird die Navigation beziehungsweise Struktur der App über ein `TabPanel()` gelöst. Das `TabPanel()` fungiert dabei als Hauptmenü am oberen Rand der Lern-App und erlaubt dadurch eine schnelle Navigation in den unterschiedlichen Tabs. Das Hauptmenü beinhaltet auf oberster Ebene die Bereiche Bruch- und Prozentrechnung. Die korrespondierenden Aufgaben sind jeweils als Tab subsumiert. Diese Aufteilung erlaubt die geplante Realisierung aus Abb. 7.6. In der *Shiny App* werden die entsprechenden *Shiny Modules* so eingebunden, dass die Menüstruktur entsteht. Dadurch wirkt die Lern-App auf den ersten Blick sehr einfach, was der folgende Code-Ausschnitt zeigt:

```

library(shiny)
source("fractionModule.R")
source("percentageModule.R")
source("introModule.R")

```

```

ui <- navbarPage("Appname", id = "tabs",
  tabPanel("Intro",
    introModuleUI("intro")
  ),
  fractionModuleUI("fractionTab"),
  percentageModuleUI("percentageTab")
)

server <- function(input, output, session){
  introModuleServer("intro")
  fractionModuleServer("fractionTab", parentsession = reactive(session))
  percentageModuleServer("percentageTab", parentsession = reactive(session))
}

shinyApp(ui, server)

```

In diesem Code-Ausschnitt ist ersichtlich, dass die Menüstruktur bereits auf dieser Ebene festgelegt ist. Die Startseite ist direkt als `tabPanel()` (Untermenüpunkt) angelegt. Alle dem Bereich der Bruchrechnung subsumierten Aufgaben werden im `fractionModule` strukturiert. Analog ist das Vorgehen im `percentageModule`. Das Beispiel der *Shiny App* zeigt, dass Erweiterungen sehr einfach ergänzt werden können. Im folgenden Code-Ausschnitt ist die vereinfachte Funktion `fractionModuleUI()` angeführt, welche die Menüstruktur des Hauptmenüpunkts *Bruchrechnung* realisiert. Der Hauptmenüpunkt ruft in den untergeordneten `tabPanel()` die UI-Funktionen der unterschiedlichen *Shiny Modules* auf.

```

fractionModuleUI <- function(id){
  ns = NS(id)
  navbarMenu("Bruchrechnung",
    tabPanel("Zahlenstrahl",
      numberLineModuleUI(ns("numberLine"))
    ),
    tabPanel("Skalieren",
      scaleModuleUI(ns("scale"))
    ),
    tabPanel("Anteil diskreter Ganzer",
      partWholeModuleUI(ns("partWhole"))
    )
  )
}

```

In der Funktion `fractionModuleUI()` ist auch das bereits angesprochene *Namespacing* (`ns = NS(id)`) ersichtlich. Beim Aufruf der UI-Funktionen der Module wird deren `id` durch das Einbetten in `ns()` in den *Namespace* aufgenommen.

Da die Lern-App neben den Aufgaben für die Schüler\*innen auch zusätzliche didaktische Erklärungen für (angehende) Lehrpersonen enthält, mussten beide Aufgabenbereiche in struktureller

Hinsicht miteinander verbunden werden. Damit der *Cognitive Load* der Schüler\*innen nicht durch – für sie uninteressante – Tabs erhöht wird, sind die didaktischen Inhalte zunächst ausgeblendet. Die didaktischen Erklärungen zu einer Aufgabe werden durch Klick auf einen Button bei der jeweiligen Aufgabe erreicht. Im folgenden Code-Beispiel ist der eingebettete Button und dessen *Observer* ersichtlich:

```
### Einbinden des Action-Buttons
actionButton(ns("toNumberLineUp"), label = "",
             icon = icon("info-circle", lib="font-awesome"))

### Observer zur Überwachung des Buttons
observeEvent(input$toNumberLineUp, {
  showTab(inputId = "tabs", target = "ZahlenstrahlDidaktisch",
          session=parentsession(), select = TRUE)
}, ignoreInit = TRUE)
```

Im dazugehörigen Didaktik-Modul ist ein weiterer Button zur Rückkehr auf die ursprüngliche Aufgabe zu finden. Dabei ändert sich die Funktionalität des *Observers* in der Hinsicht, dass sich das Ziel (*target*) ändert und der Tab des Didaktik-Moduls mittels `hideTab()` wieder ausgeblendet wird.

Verwendung von Observern

Damit die Lern-App auf Aktionen des Users beziehungsweise Ereignisse innerhalb des Codes reagieren kann, werden *Observer* eingesetzt. Das *Observer*-Pattern erlaubt es, dass Objekte automatisch auf die Änderungen anderer, verbundener Objekte reagieren können (Eilebrecht & Starke, 2019, S. 70–73). In der Lern-App werden beispielsweise *Observer* verwendet, um auf Button-Klicks zu reagieren. Ein Beispiel für die Funktionsweise des *Observers* zur Generierung eines neuen Bruches in `NumberLineModule` ist im unten angeführten Codebeispiel ersichtlich.

```
observeEvent(input$newFraction, {
  reactVals$denominator = sample(2:12,1)
  reactVals$numerator = sample(0:(2*reactVals$denominator),1)
  reactVals$xPoint = 0
  reactVals$solPointFlag = FALSE
  reactVals$intervalFlag = FALSE
})
```

Der *Observer* reagiert direkt auf Änderungen des Bedienelements `newFraction`, welches dem Button *Neue Aufgabe* entspricht. Dabei generiert der *Observer* nicht nur einen neuen Bruch (realisiert durch Zufallszahlen des Nenners und Zählers), sondern aktualisiert alle betroffenen `reactiveValues()`. So werden beispielsweise die Eingabewerte, sowie die Lösungs- und Hilfestellungs-Flags zurückgesetzt. Neben der Generierung ist der *Observer* somit auch für das Rücksetzen der Aufgabe zuständig. *Observer* können direkt auf die Veränderung von Bedienelementen, aber auch auf *Events* in der *GUI* reagieren. Ein Beispiel hierfür wäre ein *Click-Event* in einem Plot:

```
observeEvent(input$axes_click,{
  reactVals$xPoint = round(input$axes_click$x, digits=2)
})
```

Dieser *Observer* reagiert auf jeden Klick, welcher im Plot – in diesem Fall auf dem Zahlenstrahl – getätigt wird. Der *Observer* speichert die X-Koordinate in einem *reactiveValue()* ab, sodass der Punkt im Zahlenstrahl eingezeichnet werden kann.

Innerhalb der einzelnen Module wird mit *Flags* gearbeitet, welche den weiteren Programmablauf koordinieren. Beispielsweise wird das `solPointFlag` beim Überprüfen der Schüler\*innenlösung gesetzt und hat Einfluss auf das unmittelbare Feedback, sowie zusätzliche Ausgaben in der jeweiligen Visualisierung. Das Arbeiten mit *Flags* erleichtert das Lesen des Codes, da die Bedingungen der Verzweigungen klar und verständlich sind. In der Mehrheit der Fälle hält das *Flag* den Datentyp `Boolean`. In Fällen, welche nicht nur binäre Ausprägungen haben, ist das *Flag* der Datentyp `Integer` und die Ausgänge sind dementsprechend mit ganzen Zahlen codiert.

Arbeiten mit Flags

Mithilfe von `plot_ly()` können interaktive Plots dargestellt werden, welche eine große Anzahl an Metainformationen und zusätzliche Funktionalitäten bieten (Sievert, 2021). Beispielhaft für diese erweiterte Funktionalität ist das Anzeigen der exakten Koordinaten eines Punktes beim Klick auf den Punkt. Dadurch eignet sich `plot_ly()` besonders gut, um funktionale Zusammenhänge und deren zusätzlichen Informationen darzustellen. Da die Lern-App mehr auf den Bereich der Sekundarstufe I abzielt, ist die funktionale Abhängigkeit im modellhaften Prototypen nicht inkludiert. Informationen über exakte Koordinaten wären in manchen Fällen (vgl. Aufgabe 6.1.3) nicht hilfreich oder würden die Lösung (vgl. Aufgaben 6.1.1 oder 6.2.1) vorwegnehmen. Aus diesem Grund wurde die standardmäßige Plotting-Funktion von *R* verwendet. Die Funktion `plot()` gehört zu den am häufigsten verwendeten Plotting-Funktionen in *R* (R Core Team, 2019). Im Zusammenspiel mit `plotOutput()` von *R Shiny* erlaubt `plot()` sowohl *Click-* als auch *Brush-Events*. Um den *Cognitive Load* der Lern-App möglichst gering zu halten, wurde deshalb die basale Funktion `plot()` zu Visualisierungszwecken herangezogen.

plot statt plotly

## 7.4 Testen der Funktionalität

Chang (2021b) stellt neben dem Package *R Shiny* auch *shinytest* zur Verfügung. Dieses Package bietet Werkzeuge zum Erstellen und Ausführen von automatisierten Tests für Shiny-Anwendungen (Chang, 2021b). Dabei verwendet *shinytest* eine *Snapshot*-basierte Teststrategie: Es können alle Interaktionen mit ihren Inputs und Outputs durch *Snapshots* der Anwendung aufgenommen werden. Diese Basis-Aufnahme, welche auf korrektes Verhalten geprüft werden sollte, wird als Vergleichsinstanz für alle weiteren Tests verwendet (Chang, 2021b). Zukünftige Testläufe werden mit der verifizierten Basis-Aufnahme verglichen und Änderungen werden erkannt und markiert.

shinytest

Das Erstellen der Tests erfolgt durch den Aufruf der `recordTest()` Funktion (Chang, 2021b). Diese öffnet die App in einem *iFrame* mit zusätzlichen Bedienelementen zur Generierung des Tests. In Abb. 7.7 ist die Aufnahme des Tests für die Lern-App dargestellt. Im *Test Event Recorder* (vgl. Abb. 7.7) ist die Möglichkeit gegeben *Snapshots* zu erstellen und es werden alle aufgenommenen Aktivitäten (*recorded events*) dargestellt. Bei der Aufnahme für die Lern-App wurden alle Funktionalitäten mindestens einmal genutzt und geprüft, ob der Output dem erwarteten Ergebnis entspricht. Nach

Erstellen des records

erfolgreicher Aufnahme des Tests konnten alle Änderungen des *Source Codes* der Lern-App auf richtige Funktionalität verglichen werden.



Abbildung 7.7: Erstellen eines Tests mit shinytest

Vergleichen von Snapshots

Das Vergleichen eines jeweiligen Standes der Lern-App mit dem aufgenommenen Test erfolgt über den Aufruf einer weiteren Funktion des Packages *shinytest* von Chang (2021b). Der Aufruf ist im nachfolgenden Code-Beispiel dargestellt:

```
testApp("Pfad der zu testenden App", "Name des gespeicherten Tests")
```

Die Funktion führt dann die aufgenommenen Aktivitäten des Tests nochmals durch und vergleicht den Output jeweils mit den *Snapshots*. Dadurch können einerseits Änderungen, welche die Funktionsweise der Lern-App als auch textuelle oder visuelle Änderungen detektiert werden. In Abb. 7.8 ist ersichtlich, dass die *Snapshots* sowohl aus einer *JSON*- als auch einer *PNG*-Datei bestehen. Die Abbildung zeigt das Erkennen von Modifikationen der Lern-App durch *shinytest*. Dabei handelt es sich um eine Veränderung des Codes, sodass das Erkennen von Änderungen in der Arbeit visualisiert werden kann.

## 7.5 Schwierigkeiten und Limitationen

In diesem Unterkapitel werden kurz Schwierigkeiten beim Entwickeln der Lern-App und Limitationen der App beschrieben. Dabei werden vor allem größere Probleme adressiert, welche eine Umstrukturierung der Lern-App nötig machten, beziehungsweise welche während der Nutzung der Lern-App ersichtlich sind.

height-Argument

Bei GUI-Elementen wie beispielsweise interaktiven Plots können Höhe und Breite definiert werden. Chang (2021a) beschreibt deren Definitionsmöglichkeiten wie folgt: „*Must be a valid CSS unit (like 100%, 400px, auto) or a number, which will be coerced to a string and have px appended. [...]* Note that, for height, using auto or 100% generally will not work as expected, because of how height is computed with HTML/CSS.“. Das Einstellen der Breite eines Plots funktioniert problemlos mit der Angabe von Prozentwerten. Bei der Implementierung der Lern-App funktioniert die Angabe



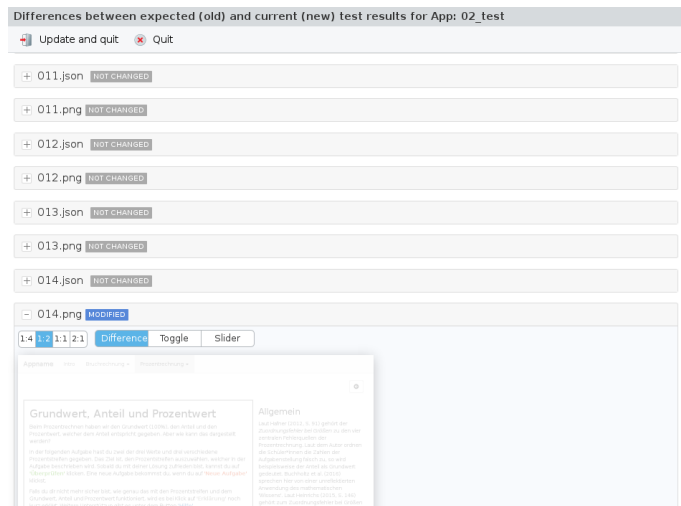


Abbildung 7.8: Modifizierte Snapshots von shinytest

von Prozentwerten beim Höhe-Attribut nicht. Nicht nur die Ausnahme in der Dokumentation von Chang (2021a), sondern alle Angaben in Prozent wurden während der Laufzeit entweder ignoriert oder produzierten Fehlermeldungen. Die einzige Möglichkeit des Einflusses auf das Höhe-Argument ist die Angabe von Pixel-Werten, was jedoch die Skalierbarkeit und das *Responsive Design* negativ beeinflusst. Diese Einschränkung machte eine Umstrukturierung der Hilfestellung der Aufgabe *Vergrößern und Verkleinern* (vgl. Kapitel 6.1.2) nötig. Das Anzeigen einer Achse zwischen den beiden Bildern, um den Skalierungsfaktor einfacher zu erkennen, war durch die eingeschränkte Möglichkeit der Definition der Höhe nicht möglich. Aus diesem Grund wurden sowohl über dem Originalbild als auch dem veränderten Bild jeweils eine Achse eingezeichnet.

Das bereits angesprochene Ein- und Ausblenden von Tabs über die Funktionen `showTab()` und `hideTab()` funktioniert während der Laufzeit der Lern-App ohne Zeitverzögerung. Beim Laden der App hat das Ausblenden der Didaktik-Module jedoch eine große Zeitverzögerung. Während dem Laden der Lern-App können für einen kurzen Moment keine Funktionalitäten genutzt oder in Tabs gewechselt werden. Diese Problematik konnte bis dato nicht gelöst werden.

Ausblenden von Tabs

Das Visualisieren der Prozentstreifen birgt keine größeren Schwierigkeiten in sich. Die Beschriftung des Anteils kann jedoch zu Problemen führen. In Abb. 7.9 ist im rechten Prozentstreifen eine suboptimale Beschriftung des Anteils ersichtlich. Da diese Beschriftung im Nachhinein dem Prozentstreifen beigefügt wird, kann es dazu führen, dass die neue Beschriftung die bestehende (Werte 0 oder Grundwert) überlappt oder komplett überschreibt. In Abb. 7.9 ist eine komplette Überlappung (rechter Prozentstreifen) ersichtlich.

Überschreiben der Achsenbeschriftung

Aufgrund der Seltenheit der Überlappung beziehungsweise Überschreibung der Beschriftungen wurde dieses *Fehlverhalten* nicht gelöst. Dennoch ist es in Sonderfällen in der App zu finden und wird daher in diesem Kapitel erwähnt.

Ein weiteres *Fehlverhalten* betrifft wiederum das Plotten. Bei der Verwendung von *Brush-Events* können Bereiche eines Plottes markiert werden. Das *Brush-Event* wird bei der Aufgabe *Anteil*

Brush-Event zum Markieren



Abbildung 7.9: Problematik des Überschreibens der Achsenbeschriftung

eines diskreten Ganzen (vgl. Kapitel 6.1.3) verwendet, sodass auf einfachem Weg mehrere Punkte gleichzeitig markiert werden können. Das markierte Rechteck des *Brush-Events* bleibt jedoch solange bestehen, bis wieder in den Plot geklickt wird. Auch beim Laden einer neuen Aufgabe oder nach Klick auf den *Überprüfen*-Button bleibt das bläulich markierte Rechteck stehen. Das Rücksetzen des *Brush-Events* innerhalb des *Servers* war nicht möglich. In Abb. 7.10 ist die Problematik des *Brush-Events* dargestellt. Das markierte Rechteck bleibt bestehen, auch wenn die Punkte bereits rot markiert wurden.

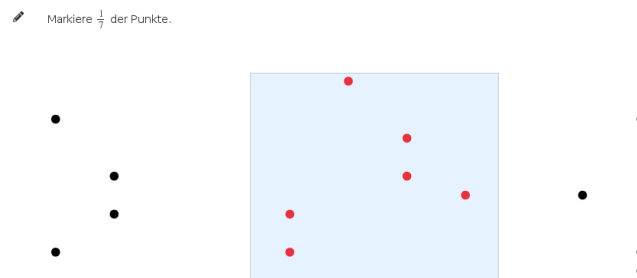


Abbildung 7.10: Problematik des Brush-Events

# Kapitel 8

## Begleitstudie

Dieses Kapitel beschreibt die Begleitstudie, welche zur Beantwortung der beiden Forschungsfragen aus Kapitel 5 durchgeführt wurde. Im ersten Schritt werden das Design und die Methode der Studie vorgestellt. Anschließend erfolgt die Darstellung der Ergebnisse sowie deren Diskussion. Die Begleitstudie wurde in einem kleinen Umfang durchgeführt und kann dementsprechend nicht mit Studien mit großen Stichprobenumfängen gleichgesetzt werden.

### 8.1 Design und Methode der Studie

Zur Beantwortung der Forschungsfragen „*Inwiefern thematisiert die Lern-App Schwierigkeiten in der Bruch- und Prozentrechnung, die in der unterrichtlichen Praxis relevant sind?*“ sowie „*Ist die Lern-App adäquat für die Zielgruppe und den Einsatz in der Schule?*“ wurden – im Sinne der qualitativen Forschung – Interviews mit Lehrpersonen durchgeführt. Durch die Beschränkung von Leitfragen stellten die Interviews vor allem die Interaktion der jeweiligen Lehrperson mit der Lern-App in den Vordergrund. Basierend auf dieser Interaktion und dem entstehenden Gespräch soll die Wirkung der App unmittelbar werden. Während der Interviews konnten die Lehrpersonen die Lern-App selbstständig bedienen, sodass Navigation und Nutzung direkt erfahrbar wurden. Datenerhebung

Wie bereits erwähnt, wurde die Begleitstudie in einem kleinen Umfang durchgeführt. Insgesamt waren vier Lehrpersonen an der Durchführung beteiligt. Bei den Lehrenden handelte es sich um Lehrpersonen von Mittelschulen in Tirol. Die Lehrkräfte wurden basierend auf den Standorten ihrer Schule ausgewählt, sodass neben dem städtischen Raum auch die ländliche Region mitbedacht wird. Dadurch sind Lehrende der Bezirke Innsbruck, Innsbruck-Land und Reutte in der Begleitstudie vertreten. Es wurden drei weibliche Lehrpersonen und eine männliche Lehrkraft interviewt. Bezüglich der Arbeitserfahrung sind drei der Lehrkräfte bereits länger in einem Dienstverhältnis an Tiroler Schulen. Eine Lehrkraft befindet sich in ihren ersten Dienstjahren. Durch die unterschiedlichen Dienstzeiten der interviewten Lehrkräfte sollen die heterogenen Erfahrungshorizonte in kleinem Maße mitbedacht werden. Beschreibung der Stichprobe

Während der Interviews wurde vor allem auf die Interaktion der Lehrpersonen mit der Lern-App und dem dadurch entstehenden Gespräch Wert gelegt. Dementsprechend wurde die Anzahl an Leitfragen des Interviews

Leitfragen für das Interview auf vier Fragen beschränkt. Die ausgearbeiteten Leitfragen sollen die Beantwortung der Forschungsfrage ermöglichen und lauten folgendermaßen:

1. Korrespondieren die Aufgaben mit den Schwierigkeiten der Schüler\*innen aus der unterrichtlichen Praxis?
2. Ist die Verbindung der Aufgaben mit den beschriebenen didaktischen Hintergründen gegeben?
3. Entspricht die sprachliche Ausarbeitung dem kognitiven Niveau der Schüler\*innen?
4. Ist die Lern-App praxistauglich? Falls ja, wie kann diese eingesetzt werden?

Die Leitfragen ergeben sich aus den beiden Forschungsfragen aus Kapitel 5 und sollen dem Interview zusätzlich etwas Struktur verleihen. Die erste Leitfrage fokussiert direkt den Zusammenhang der Aufgaben der Lern-App mit den Schwierigkeiten der Schüler\*innen. Da die Lern-App basierend auf der bestehenden Literatur entwickelt wurde, soll diese Frage die tatsächlich erfahrbaren Schülerschwierigkeiten in Tiroler Mitteschulen miteinbeziehen. Die zweite Leitfrage fokussiert auf die Relation zwischen den entwickelten Aufgaben der Lern-App und den intendierten didaktischen Hintergründen. Das Dilemma der sprachlichen Ausarbeitung wird in der dritten Leitfrage in den Vordergrund gestellt. Dabei referenziert diese Leitfrage vor allem auf die Schwierigkeit, Erklärtexte und Aufgaben sprachlich einfach, aber dennoch mathematisch korrekt zu formulieren. Diese Frage hat daher einen starken Konnex zur zweiten Forschungsfrage – *Adäquatheit der Lern-App für die Zielgruppe und der Praxis*. Die vierte Leitfrage konzentriert sich auf die Praxistauglichkeit und Einsatzfähigkeit der Lern-App.

Durchführung

Die Interviews anhand der Leitfragen wurden mit den Lehrpersonen im Juni 2021 durchgeführt. Dabei konnten die Lehrpersonen die Lern-App direkt über die veröffentlichte Version unter dem Link <https://fachdidaktik-mathematik.uibk.ac.at/shiny/thesis/mathe-bruno/> testen. Dementsprechend konnte die Interaktion der Lehrpersonen mit der Lern-App in die Begleitstudie einfließen. Weder die Leitfragen noch die Lern-App wurden vorab an die Lehrpersonen übermittelt, sodass die unmittelbaren Reaktionen und Antworten in die Interviews einfließen konnten. Insgesamt wurden drei Gespräche geführt – ein Interview mit zwei Lehrpersonen (Transkript 11.3.1) und zwei Einzelgespräche (Transkripte 11.3.2 und 11.3.3). Die Gespräche wurden digital aufgezeichnet und besonders betonte Stellen oder Aussagen wurden gleichzeitig handschriftlich festgehalten.

Transkription

Auf Basis der digitalen Aufzeichnung wurden Transkripte erstellt, welche in Kapitel 11.3 im Anhang zu finden sind. Beim Transkribieren wurden dialektal gefärbte Aussagen ohne gesonderte Kennzeichnung ins Deutsche übersetzt. Weiters wurden die Gespräche von Füllwörtern, Sprechpausen oder Versprechern bereinigt. Die Transkripte sind anonymisiert und nur den Regionen zugeordnet. Die Transkripte bieten die Datengrundlage für die Darstellung der Ergebnisse und die anschließende Diskussion.

## 8.2 Ergebnisse

Die Ergebnisse der Begleitstudie wurden direkt aus den Transkripten abgeleitet. In diesem Kapitel sind einerseits die Ergebnisse bezogen auf die Leitfragen als auch bezogen auf die einzelnen Aufgaben der Lern-App dargestellt. Durch diese Aufteilung sollen die Ergebnisse der Interviews deutlicher und besser verständlich werden.

### 8.2.1 Ergebnisdarstellung der Leitfragen

In diesem Unterkapitel werden die Ergebnisse bezüglich der vier Leitfragen dargestellt. Dabei wurde vor allem darauf geachtet, Schlüsselaussagen so zusammenzufassen, sodass eine kurze Ergebnisdarstellung möglich wird.

Dieser Absatz behandelt die Ergebnisse zur Frage *„Korrespondieren die Aufgaben mit den Schwierigkeiten der Schüler\*innen aus der unterrichtlichen Praxis?“*. In den Interviews wird deutlich, dass die Aufgaben typische Schülerschwierigkeiten aufgreifen. So beschreibt eine Lehrperson die Aufgaben wie folgt: *„Es sind jedenfalls keine Standard-Aufgaben, welche man überall findet. Es sind wirklich Aufgaben, bei welchen man sieht, wenn das Grundverständnis fehlt. Die Aufgaben behandeln wirklich die Probleme“* (vgl. Transkript 11.3.2: Zeile 72). Das Einbeziehen der Grundvorstellungen, dessen Wichtigkeit die vorliegende Arbeit bereits mehrfach betont hat, wurde im Laufe der Interviews auch von den Lehrpersonen adressiert. So ist im Transkript 11.3.3 (Zeile 69) die Verbindung zu den Vorstellungen und dem Vorstellungsvermögen der Schüler\*innen erwähnt. Weiters wird angegeben, *„dass die App den Schüler[\*innen] weiterhilft, vor allem für das Zahlenverständnis“*. Da die Lern-App einen prototypischen Modellcharakter aufweist, wurden nur eine geringe Anzahl an Schwierigkeiten in Aufgaben umgewandelt. Die Auswahl der Schwierigkeiten deckt laut den Interviews einen großen Bereich davon ab. Bei den Interviews wurden keine weiteren häufig auftretenden Problemfälle für die Schüler\*innen erwähnt. Dementsprechend korrespondiert die Auswahl der Aufgaben mit tatsächlichen Fehlvorstellungen beziehungsweise Schwierigkeiten der Schüler\*innen. Leitfrage 1

Auf die Leitfrage *„Ist die Verbindung der Aufgaben mit den beschriebenen didaktischen Hintergründen gegeben?“* sind die Lehrpersonen nicht direkt eingegangen, sondern die Beantwortung floss während des Gesprächs ein. Die Lehrpersonen verbanden die Aufgaben intuitiv mit den beschriebenen didaktischen Hintergründen. Beispielsweise wird bei der Aufgabe *Einbeziehen des Prozentstreifens* (vgl. Kapitel 6.2.1) die Schwierigkeit genannt, dass Prozentsätze über 100% Hürden für Schüler\*innen darstellen können (Transkript 11.3.1: Zeile 111). Weiters wird im Transkript 11.3.2 (Zeile 16) auf die Schwierigkeiten der Anteilsvorstellung eingegangen und dadurch auch wieder die Aufgabe mit dem didaktischen Hintergrund verbunden. Die Probleme der Schüler\*innen mit dem Äquivalenzklassenprinzip wurden im Transkript 11.3.3 (Zeile 24) angegeben und somit wurde auch diese Aufgabe mit dem beschriebenen didaktischen Hintergrund verbunden. Basierend auf diesen Aussagen wird angenommen, dass die Verbindung der Aufgaben mit dem beschriebenen didaktischen Hintergrund gegeben ist. Leitfrage 2

Die Frage, ob die sprachliche Ausarbeitung dem kognitiven Niveau der Schüler\*innen entspricht, wurde von den Lehrpersonen sehr heterogen beantwortet. Im Transkript 11.3.1 (Zeile 81) ist beispielsweise Zweifel angebracht: *„Aber ob unsere Schüler[\*innen] die Sprache verstehen, da sie kein so hohes Niveau gewöhnt sind.“* Diese Aussage wird relativiert, dass schwächere Schüler\*innen mit der Sprache Schwierigkeiten haben könnten, leistungsstärkere Schüler\*innen jedoch nicht (Transkript 11.3.1: Zeile 82). Eine weitere Lehrperson argumentiert, dass das sprachliche Niveau adäquat sei, da *„die Schüler[\*innen] ja die mathematischen Begriffe kennen“* sollten (Transkript 11.3.2: Zeile 74). Eine mögliche Schwierigkeit könnte das sprachliche Niveau jedoch für Nichtmuttersprachler darstellen (Transkript 11.3.2: Zeile 74). Neben dem sprachlichen Niveau der Lern-App wurde auch die Länge der unterschiedlichen Texte (Erklärungstexte, Angaben, Aufgaben, Hilfestellungen etc.) als Schwierigkeit eingestuft (Transkript 11.3.3: Zeile 16). Um die Kritik gegenüber der verwendeten Sprache in der Lern-App zu relativieren, wurde noch argumentiert, dass *„das Niveau in* Leitfrage 3

*unterschiedlichen Schulen unterschiedlich sein kann*“ (Transkript 11.3.1: Zeile 84). Aufgrund dieses unterschiedlichen Niveaus sei es auch äußerst schwierig, perfekt angepasste Texte für alle Schüler\*innen zu schreiben.

Leitfrage 4

Die letzte Leitfrage referenziert auf die Praxistauglichkeit der Lern-App im schulischen Unterricht. Alle interviewten Lehrpersonen gaben an, dass sie sich gut vorstellen könnten, die Lern-App im Unterricht zu nutzen. Dabei wurden einige Szenarien genannt:

- **Szenario I:** Leistungsstärkere Schüler\*innen können aufgrund der Erklärungen allein oder in Gruppen daran arbeiten (Transkript 11.3.1: Zeile 130).
- **Szenario II:** Leistungsschwächere Schüler\*innen können mit der Lern-App üben. Für die Erklärungen ist die Unterstützung durch die Lehrperson wichtig (Transkript 11.3.1: Zeile 130).
- **Szenario III:** Die Lern-App kann am Ende einer Unterrichtssequenz eingesetzt werden (Transkript 11.3.2: Zeile 76).
- **Szenario IV:** Die Lern-App kann für die Hausübung herangezogen werden (Transkript 11.3.1: Zeile 76).
- **Szenario V:** Die Lern-App kann bei Freiarbeiten genutzt werden (Transkript 11.3.3: Zeile 73).

Trotz der kurzen Kennenlernphase der Lern-App konnten sich die Lehrpersonen bereits einige didaktische Einsatzmöglichkeiten vorstellen. Basierend auf diesen Antworten wird die Lern-App als praxistauglich eingeschätzt. Dieses Unterkapitel wird noch durch die Thematisierung der Ergebnisse bezüglich des Aufbaus der Lern-App und Verbesserungsmöglichkeiten abgerundet.

Aufbau

Für den Aufbau der Lern-App und die Unterteilung in die Aufgaben und den jeweiligen Didaktikseiten ist durchwegs positives Feedback erwähnt worden (Transkript 11.3.2: Zeile 18). Vor allem das Layout der Didaktik-Seiten wurde als angenehm empfunden, da kein Splitscreen benötigt wurde, um sowohl den didaktischen Text als auch die Aufgabe anzuzeigen (Transkript 11.3.2: Zeile 20). Im Transkript 11.3.1 (Zeile 60) wurde für eine getrennte Version für Lehrpersonen und Schüler\*innen argumentiert, sodass nur die Lehrpersonen Zugang zu den didaktischen Erklärungen haben. Andererseits wurden in den Transkripten 11.3.2 (Zeile 22) und 11.3.3 (Zeile 43) erwähnt, dass auch Eltern die didaktische Erklärung interessant finden könnten. So drückt sich eine Lehrperson wie folgt aus: *„Da in der Aufgabe schon argumentiert wird, warum die Aufgabe so ist, wie sie ist, können die Eltern das einfach nachlesen. Das ist schon angenehm*“ (Transkript 11.3.2: Zeile 24).

Verbesserungsmöglichkeiten

Die Verbesserungsmöglichkeiten zu der Funktionsweise der Aufgaben sind bei den jeweiligen Absätzen bereits beschrieben. Dieser Absatz behandelt noch allgemeine Verbesserungsvorschläge für die Lern-App. Ein Vorschlag war, dass die Erklärungen nicht über ein *Pop-Up-Window* erscheinen, sondern wie die didaktische Erklärung am Seitenrand angezeigt werden (Transkript 11.3.2: Zeile 46). Dadurch kann immer noch der Transfer vom statischen Beispiel zur Aufgabe stattfinden, aber die Schüler\*innen können ihr Vorgehen beim Lösen direkt mit der Erklärung vergleichen. Ein weiterer Vorschlag bezog sich auf eine Feedback-Funktion für die Lehrpersonen, sodass diese eine Aufstellung bekommen, was die Schüler\*innen wie erfolgreich bearbeitet haben (Transkript 11.3.2: Zeile 76). Beide dieser Vorschläge bergen großes Potential und könnten in weiteren Versionen der Lern-App umgesetzt werden. Für den prototypischen Modellcharakter wird die Lern-App auf ihre Basisfunktionen beschränkt.

### 8.2.2 Ergebnisdarstellung der Aufgaben

Dieses Unterkapitel beschreibt die Ergebnisse bezogen auf die Aufgaben. Dabei wurden vor allem die Funktionsweise und die didaktische Wirkung in den Vordergrund gestellt.

Die Aufgabe mit den Bruchzahlen und dem Zahlenstrahl (vgl. Kapitel 6.1.1) wurde von allen interviewten Lehrpersonen als sinnvoll und hilfreich bewertet, da vor allem das Zahlverständnis (Transkript 11.3.3: Zeile 69) angesprochen wird. Das Verwenden eines Zahlenstrahls größer 1 wurde positiv aufgenommen, da die Schüler\*innen dann explizit über die Bruchzahl nachdenken müssen (Transkript 11.3.1: Zeile 28+29). Trotz der Kritik, dass die Erklärungstexte vor allem für schwächere Schüler\*innen zu lang sind (Transkript 11.3.3: Zeile 16), wurde die Erklärung zur ersten Aufgabe als hilfreich eingestuft. So referenziert eine Lehrperson die Erklärung durch „*Der wichtige Punkt ist in der Erklärung: dass bei  $\frac{3}{4}$  in vier gleich große Teile zerlegt wird. Gerade in der ersten Klasse macht dieses Aufteilen noch viele Probleme*“ (11.3.2: Zeile 16). Das Einzeichnen der Unterteilungen bei der Hilfestellungen fanden die Lehrpersonen hilfreich (Transkripte 11.3.1: Zeile 45; 11.3.2: Zeile 12+14; 11.3.3: Zeile 12+14). Jedoch wurde einmal bemerkt, dass das Einzeichnen der Unterteilungen leicht übersehen werden kann (Transkript 11.3.1: Zeile 33). Die Darstellung der Äquivalenzklassen in der zweiten Aufgabe wurde als gute Visualisierungsmöglichkeit eingestuft (Transkript 11.3.3: Zeile 24). Eine Lehrperson hat angemerkt, dass die Aufgabenstellung nicht ganz klar formuliert ist (Transkript 11.3.1: Zeile 42+46). Die Grundstimmung gegenüber der Aufgabe *Einbinden des Zahlenstrahls* war trotz kleinerer Kritiken durchwegs positiv.

Aufgabe: Einbinden  
des Zahlenstrahls

Die Aufgabe *Vergrößern und Verkleinern* (vgl. Kapitel 6.1.2) wurde als besonders hilfreich im Hinblick auf die Rechenoperationen Multiplikation und Division gedeutet. Die Aufgabe stellt eine gute Voraussetzung für das spätere Verständnis der Multiplikation dar (Transkript 11.3.2: Zeile 44). Weiters erwähnt eine Lehrperson die Grundvorstellung in diesem Bereich wie folgt „*Ich finde, dass die Aufgabe super dazu geeignet ist, dass die Kinder ein Gespür bekommen. [...] Ein Gefühl bekommen sie bei der Aufgabe sicher*“ (Transkript 11.3.3: Zeile 35). Als Kritikpunkt wurde eine sprachliche Hürde genannt, da zwei Lehrpersonen aussagten, dass der Begriff *Skalieren* bei ihnen nicht verwendet wird (Transkript 11.3.1: Zeile 65). Eine weitere Lehrperson sieht diese Problematik vor allem in den ersten beiden Klassen der Sekundarstufe I, jedoch gibt sie an, dass ab der dritten Klasse von Skalierungsfaktoren gesprochen wird (Transkript 11.3.2: Zeile 40). Im Interview Transkript 11.3.3 (Zeile 31) wird noch erwähnt, dass der Wechsel zwischen unterschiedlichen Schreibweisen für leistungsschwächere Schüler\*innen schwierig sein könnte.

Aufgabe: Vergrößern  
und Verkleinern

Die Aufgabe *Anteil diskreter Ganzer* wurde als gut befunden, da sie sich auf ein diskretes und nicht auf ein kontinuierliches Ganzes stützt (Transkript 11.3.3: Zeile 49). Die Hilfestellung durch das Gruppieren der Punkte sorgt für Übersichtlichkeit und eine leichtere Lösungsfindung (Transkripte 11.3.2: Zeile 53; 11.3.3: Zeile 47). Auch der Erklärungstext wurde – trotz seiner Länge – als gewinnbringend für die Aufgabe interpretiert (Transkript 11.3.3: Zeile 49). Als Verbesserungsmöglichkeit wurde noch genannt, dass im Angabetext ergänzt werden könnte, dass jede Aufgabe so lange bearbeitet werden kann, bis sie korrekt ist (Transkript 11.3.1: Zeile 90).

Aufgabe: Anteil diskreter  
Ganzer

Die Aufgabe *Einbinden des Prozentstreifens* (vgl. Kapitel 6.2.1) ist sehr ähnlich zur Aufgabe *Einbinden des Zahlenstrahls*. Das Betrachten der Aufgabe und des Prozentstreifens im einfachen Modus, wurde von den interviewten Lehrpersonen als gut machbar eingeschätzt (Transkript 11.3.1: Zeile 106). Der schwierige Modus wurde auch von den Lehrpersonen als anspruchsvoll angesehen, wie beispielsweise im Transkript 11.3.1 (Zeile 108) durch „*Dann müssen die Schüler zuerst den Grundwert*

Aufgabe: Einbinden  
des Prozentstreifens

abschätzen und dann noch den Anteil. Das ist eine wirklich anspruchsvolle Aufgabe.“ angegeben. Gerade im schwierigen Modus wurde die Hilfestellung als besonders wertvoll interpretiert (Transkripte 11.3.1: Zeile 108; 11.3.2: Zeile 59). Bezüglich der Einteilung von Prozentsätzen über 100% als leichte Aufgabe waren die Lehrpersonen gespalten. Zwei Lehrpersonen schätzten diese Aufgabenstellung als schwierig ein (Transkript 11.3.1: Zeile 112) und die anderen Lehrpersonen als einfach (Transkripte 11.3.2: Zeile 61; 11.3.3: 58). Auch bei dieser Aufgabe ist die *Erklärung* wieder unterstützend.

**Aufgabe: Grundbegriffe** Die Aufgabe *Zusammenspiel von Grundwert, Prozentwert und Prozentsatz* (vgl. Kapitel 6.2.2) wurde von den Lehrpersonen als interessant und praxistauglich eingestuft (Transkript 11.3.3: Zeile 61). Vor allem das Anzeigen des invertierten Prozentstreifens zur Aufgabenstellung wurde als positiv angesehen, da die Schüler\*innen dadurch nicht nur die Zahlen vergleichen, sondern die Situation modellieren müssen (Transkripte 11.3.2: Zeile 68; 11.3.3: Zeile 63). Besonders hilfreich sei auch die Hilfestellung, welche sich direkt auf die Aufgabe bezieht und dadurch konkret helfen kann. So wird beispielsweise im Transkript 11.3.3 (Zeile 67) folgendes erwähnt: „*Die Hilfe finde ich wirklich gut. Denn dann können die Schüler[\*innen], wenn sie ein Problem bei einer Aufgabe haben, wirklich direkt sehen, wie man vorgeht. Ich muss schon sagen, das ist wirklich durchdacht*“. Für diese Aufgabe gab es keine Kritikpunkte von Seiten der interviewten Lehrpersonen.

### 8.3 Diskussion

**Rekapitulation der Ziele** Die Ziele der vorliegenden Arbeit haben zwei Ausprägungen: Die Entwicklung eines prototypischen Modells einer Lern-App und die Evaluierung der Aufgaben der Lern-App bezüglich tatsächlich auftretenden Schwierigkeiten in der schulischen Praxis (vgl. Kapitel 5). Die Entwicklung der Lern-App wurde in Kapitel 6 und Kapitel 7 bereits erschöpfend dargestellt. Die Zielerreichung der Begleitstudie wird in folgender Diskussion zusammenfassend dargestellt.

**Forschungsfrage I** Die erste Forschungsfrage fokussierte sich darauf, ob die Lern-App die – für die unterrichtliche Praxis relevanten – Schwierigkeiten aufgreift. Basierend auf den durchgeführten Interviews kann bestätigt werden, dass die behandelten Schwierigkeiten in der Lern-App durchaus in der schulischen Praxis auftreten. Weiters bietet die Lern-App durch die randomisierten Aufgaben eine große Menge an Übungsaufgaben zu jeder Schwierigkeit. Reinhold (2019, S. 277) beschreibt, dass sich der Bruchzahlbegriff durch Verständnis der drei Konzepte *Teil vom Ganzen*, *Erweitern und Kürzen* und *Größenvergleich* erfassen lässt. In der Lern-App wird die Schwierigkeit der holistischen Betrachtungsweise der Brüche (vgl. Kapitel 6.1.1) behandelt, was als Aspekt des *Teil des Ganzen* angesehen werden kann. Weiters referenziert die Aufgabe *Anteil diskreter Ganzer* (vgl. Kapitel 6.1.3) direkt auf die Vorstellung des *Teil eines Ganzen*. Die Wichtigkeit des Verständnisses für die Grundvorstellung des *Bruchs als Anteil eines Ganzen* wird auch in den Interviews der Begleitstudie aufgezeigt. Die von Reinhold (2019, S. 277) deklarierten Bereiche *Erweitern und Kürzen* und *Größenvergleich* werden in der Lern-App nicht explizit behandelt, da eine Aufgabe zum – in der Literatur sehr häufig erwähnten – Fehler des *Vergrößerns durch Multiplizieren* erstellt wurde. Laut Christou et al. (2020) und Roell et al. (2017) wird dadurch direkt ein Aspekt des *Natural Number Bias* (vgl. Kapitel 4.2.1) thematisiert. In den Interviews der Begleitstudie wurde die Schwierigkeit der Vorstellung *Multiplizieren vergrößert immer* erwähnt, wobei die Aufgabe *Vergrößern und Verkleinern* (vgl. Kapitel 6.1.2) vor allem als Vorbereitung für die Multiplikation der rationalen Zahlen gesehen wurde. Dementsprechend erfüllen die Aufgaben der Lern-App bezüglich der Bruchzahlen die Forderung, dass sie sich auf die unterrichtlich relevante Praxis beziehen. Auch im Bereich der



Prozentzahlen greifen die erstellten Aufgaben der Lern-App reale Schwierigkeiten der Schüler\*innen auf. So wird in den Interviews beispielsweise der Fehler genannt, dass Prozentsätze über 100% von den Schüler\*innen nicht als Prozentsätze anerkannt werden. Diese Problematik aus der Praxis wird auch von Pöhler (2018, S. 30) referenziert und steht unter anderem hinter der Aufgabe *Einbinden des Prozentstreifens* (vgl. Kapitel 6.2.1). Der *Zuordnungsfehler bei Größen* laut Hafner (2012, S. 91) bei der Aufgabe *Zusammenspiel von Grundwert, Prozentwert und Prozentsatz* (vgl. Kapitel 6.2.2) wurde von den Lehrpersonen als Problem der unterrichtlichen Praxis bestätigt. Auf Basis der Interviews der Begleitstudie kann demnach behauptet werden, dass die Lern-App tatsächlich relevante Probleme der unterrichtlichen Praxis anspricht.

Bezüglich der zweiten Forschungsfrage „*Ist die Lern-App adäquat für die Zielgruppe und den Einsatz in der Schule?*“ kann generell eine positive Antwort gegeben werden. Basierend auf den Interviews ist offensichtlich, dass die Lern-App eine große Palette an Einsatzmöglichkeiten in der schulischen Praxis hat. Die Lehrpersonen konnten trotz der kurzen Kennenlernphase bereits fünf unterschiedliche Szenarien für den Einsatz der Lern-App nennen. Bei der Passung auf die Zielgruppe scheint vor allem das sprachliche Niveau der Lern-App in den Interviews kontrovers auf. Für leistungsschwächere Schüler\*innen oder Nichtmuttersprachler wird – basierend auf den Interviews – vermutet, dass das Niveau zu hoch ist. Wohingegen leistungsstärkere Schüler\*innen keine Probleme mit der Sprache haben sollten. Dennoch kann davon ausgegangen werden, dass die Lern-App für die Zielgruppe adäquat ist. Reinhold (2019, S. 280) erwähnt in den Ergebnisse der Studie zu *ALICE:Bruchrechnen* noch, dass unterschiedliche Wirkmechanismen von Lernumgebungen für leistungsschwächere und leistungsstärkere Schüler\*innen abgeleitet werden können. Für leistungsstärkere Schüler\*innen kann eine fachdidaktisch motivierte multimediale Aufbereitung der Inhalte bereits zu einer Steigerung führen, während leistungsschwächere Schüler\*innen eine zusätzliche interaktive Aufbereitung hilfreich sein kann (Reinhold, 2019, S. 280–281). Die entwickelte Lern-App beinhaltet nicht nur die fachdidaktisch motivierte Aufbereitung, sondern inkludiert interaktive Aufgaben und ist daher für die unterschiedlichen Leistungsstärken der Schüler\*innen einsetzbar. Forschungsfrage II

Die Begleitstudie konnte zeigen, dass das *Ziel ‘Lern-App’* umgesetzt wurde und sowohl die praxisrelevanten Schwierigkeiten der Schüler\*innen anspricht als auch die Praxistauglichkeit der Lern-App gegeben ist. Das grundlegende Ziel des *Überwindens* oder zumindest des *Minimierens* der Denkhürden im Bereich der Bruch- und Prozentrechnung der Lern-App konnte – basierend auf den Interviews – erreicht werden. Schlussendlich muss noch angemerkt werden, dass es sich bei der Lern-App um ein prototypisches Modell handelt, welches erweitert werden kann und dementsprechend noch weitere Schwierigkeiten beziehungsweise Denkhürden behandeln könnte. Die Begleitstudie ist klein gehalten und der kleine Stichprobenumfang limitiert die Möglichkeit allgemein gültige Aussagen aus der Studie zu ziehen. Eine Untersuchung der Wirkung der Lern-App auf das Verständnis der Schüler\*innen ist ausständig. Fazit



# Kapitel 9

## Fazit

Diese Arbeit hat versucht, die Zugänge und mögliche Denkhürden zu den Bruchzahlen und Prozentzahlen darzustellen. Die innermathematische Gleichheit der Bruch- und Prozentrechnung wurde aufgrund der schulischen Trennung der beiden Bereiche in der Arbeit zwar nicht ausgehebelt, jedoch wurde eine getrennte Beschreibung der beiden Schreibweisen (Padberg & Wartha, 2017, S. 32) gewählt. *Epistemologische Denkhürden*, wie beispielsweise der *Natural Number Bias (NNB)* wurden ausgearbeitet und bilden die Basis für die Entwicklung der Aufgaben der prototypischen Lern-App. Der theoretische Unterbau, welcher durch die Beschreibung der Aspekte, der Grundvorstellungen, der typischen Schülerfehler und der Denkhürden gegeben ist, machten das Entwickeln einer Lern-App mit expliziten Fokus auf den Schwierigkeiten möglich. Weiters wurde das Aufgreifen von praxisrelevanten Schwierigkeiten der Bruch- und Prozentrechnung mittels einer kleinen Begleitstudie überprüft.

Zweck der Arbeit

Der Begriff *Grundvorstellung* charakterisiert im deutschsprachigen Raum konkrete und intuitive Vorstellungen mathematischer Inhalte (Reinhold, 2019, S. 21). Grundvorstellungen sind *mentale* Repräsentationen mathematischer Objekte und Sachverhalte (Griesel et al., 2019). Der *normative* Aspekt der Grundvorstellungen fungiert laut vom Hofe (1995) als pädagogische Leitlinie und der *deskriptive* Aspekt ermöglicht die Charakterisierung der *individuellen Bilder* und *Erklärungsmodelle* der einzelnen Lernenden. Die Aspekte *Sinnkonstruktion*, *anschaulichkeit* und *Anwendungsbezug* spielen bei den Grundvorstellungen eine essenzielle Rolle (Reinhold, 2019, S. 21–22). Grundvorstellungen aus mathematischen Unterweisungen, wie beispielsweise im Schulunterricht, werden mit *sekundären Grundvorstellungen* betitelt. Im Gegensatz dazu stammen *primäre Grundvorstellungen* aus dem Wissen und Handlungserfahrungen der Schüler\*innen. Grundvorstellungen fließen in den Modellierungskreislauf eines realweltlichen Problems ein und spielen neben den Übersetzungsprozessen auch beim mathematischen Arbeiten eine große Rolle.

Grundvorstellungen

Der fachlich „saubere“ Zugang zu den rationalen Zahlen über Äquivalenzklassen spielt, aufgrund des hohen Abstraktionsgrads, im Schulunterricht kaum eine Rolle. Für das Lehren und Lernen von und über rationale Zahlen werden in der Literatur einige Grundvorstellungen beschrieben, welche sich einerseits auf die Zahlvorstellung und andererseits auf die Rechenoperationen beziehen. Insbesondere scheint die *Anteilsvorstellung* eines oder mehrerer (diskreter oder kontinuierlicher) Ganzer bei der Einführung der Bruchzahlen auf. Dabei handelt es sich beim *Anteil eines Ganzen* ( $\frac{a}{b}$  von 1)

Grundvorstellungen  
der Bruchzahlen und  
-rechnungen

um einen Sonderfall der *Anteilsvorstellung mehrerer Ganzer* ( $\frac{a}{b}$  von  $c$ ). Bei der **Anteilsvorstellung** liegt der Fokus darauf, in wie viele Teile das Ganze aufgeteilt (Nenner) und wie viele Teile schlussendlich betrachtet werden (Zähler). Weitere Grundvorstellungen zu den Bruchzahlen sind:

- **Bruchzahl als Vergleichsoperator:** Brüche können dazu verwendet werden, Objekte bezüglich Anzahl, Größe oder Gewicht zu vergleichen. Durch diese Grundvorstellung kann eine natürliche Beziehung zwischen „von“ und „mal“ gebildet werden.
- **Bruchzahl als Resultat einer Division:** Bei dieser Grundvorstellung wird der Bruchstrich äquivalent zum Divisionszeichen interpretiert. Diese Vorstellung kann ein Bindeglied zwischen gemeinen Brüchen und Dezimalbrüchen sein.
- **Bruchzahl als Verhältnis:** Der Doppelpunkt bei  $\frac{a}{b} = a : b$  wird in diesem Fall nicht als Divisionszeichen, sondern als Verhältniszeichen aufgefasst. Hier ist jedoch auf das Spannungsfeld zwischen *Bruchzahl als Verhältnis* und *Bruchzahl und Verhältnis* aufmerksam zu machen.
- **Bruchzahl als Quasikardinalzahl:** Brüche werden mit der Maßzahl  $a$  und der Einheit  $\frac{1}{b}$  aufgefasst. Die Addition und Subtraktion kann auf das Rechnen in  $\mathbb{Z}$  zurückgeführt werden.
- **Bruchzahl als Quasiordinalzahl:** Diese Grundvorstellung ist auf Stammbrüche beschränkt und hängt stark mit dem Ordinalzahlaspekt der natürlichen Zahlen zusammen. Der Größenvergleich von Stammbrüchen kann mithilfe dieser Vorstellung besonders anschaulich erklärt werden.
- **Bruchzahl als Maßzahl:** Bei dieser Vorstellung beziehen sich die Brüche zwingen auf Größen, da die Bruchzahlen mit Maßeinheiten versehen sind.
- **Bruchzahl als absoluter Anteil:** Brüche werden hier als Relation zwischen der Gesamtbezugsgröße und der Anteilsbezugsgröße interpretiert. Ähnlich wie bei *Bruchzahl als Verhältnis* treten bei dieser Grundvorstellung Probleme auf.

Bei den Grundvorstellungen zu den Rechenoperationen gibt es ähnlich zu den Bruchzahlvorstellungen anschauliche Wege. Das Erweitern wird oftmals mit *Verfeinern* und das Kürzen mit *Vergrößern* erklärt, wobei die *Gleichwertigkeit von Brüchen* die Grundlage bildet. Addieren kann mit *Hinzufügen* beziehungsweise *Vorwärtsschreiten* in Verbindung gebracht werden. Das *Wegnehmen* oder *Rückwärtsschreiten* sind dabei die analogen Konzepte für die Subtraktion. Für die Multiplikation von Brüchen mit natürlichen Zahlen kann diese auf wiederholte Addition gleichnamiger Brüche zurückgeführt werden. Weitere Vorstellungen bezüglich der Multiplikation sind die *Multiplikation über Anteil von Anteil* und *Multiplikation über Flächeninhalt*. Das Dividieren wird mit *Verteilen* oder *Messen* gleichgesetzt. Alternativ kann die Division als *Umkehroperation* der Multiplikation eingeführt werden.

Grundvorstellungen der  
Prozentzahlen und -  
rechnungen

Die Prozentrechnung ist in den rationalen Zahlen inkludiert und ist aus fachwissenschaftlicher Sicht *eher uninteressant*. Die Vorstellungen im Hinblick auf die Prozentzahlen sind ähnlich zu den Bruchzahlen oder Dezimalbrüchen. Die folgenden Grundvorstellungen referenzieren direkt auf Prozentzahlen:

- **Prozente als Zahlen:** Bei dieser Grundvorstellung werden Prozente als *Hundertstel* oder *von Hundert* interpretiert. Diese Vorstellung erlaubt die Gleichsetzung von Prozentangaben mit Brüchen oder Dezimalzahlen.
- **Prozente als Anteile:** Diese Grundvorstellung hält Analogien zur Grundvorstellung *Anteil eines Ganzen* der Bruchzahlen bereit. Das Ganze wird dabei in Anteile, wie beispielsweise

1% oder 10%, aufgeteilt. Diese Vorstellung bleibt auch für die Wahrscheinlichkeitsrechnung tragfähig.

- **Prozente als Verhältnisse:** Der Vergleich von zwei Mengen wird bei dieser Grundvorstellung fokussiert, dabei gibt es *Vergleichssituationen* und *Veränderungssituationen*.

Beim Operieren mit Prozenten greift die *Von-Hundert-Vorstellung* die Grundvorstellung der *Prozente als Anteile* auf. Bei der *Hundertstel- oder Prozentoperator-Vorstellung* wird ein Operator-konzept herangezogen und die Angabe von  $p\%$  resultiert in den multiplikativen Operator  $\frac{p}{100}$ . Die *Bedarfseinheiten-Vorstellung* schließt die Grundvorstellungen zur Prozentrechnung ab. Dabei werden dem Grundwert 100% zugeordnet und demzufolge besteht dieser aus 100 1%-Teilen.

Trotz oder gerade wegen der Vielzahl an beschriebenen Grundvorstellungen für den Bereich der Bruch- und Prozentzahlen und deren Rechenoperationen stellt der Bereich der rationalen Zahlen die Schüler\*innen vor einige Hürden. Die *epistemologischen Denkhürden* basieren auf der Disziplin der Mathematik selbst und nicht auf den kognitiven Prozessen der Schüler\*innen. Die *epistemologischen Denkhürden* sind stark mit der *Conceptual Change Theory* und mit dem jeweiligen Vorwissen der Schüler\*innen verwoben. *Epistemologische Denkhürden* machen einen Wechsel der Grundvorstellungen bezüglich eines Konzepts notwendig. Lernprozesse dürfen nicht so weit geglättet werden, dass die zentralen Hindernisse ausgeklammert werden, da diese Bildungsprozesse ermöglichen. Ein Spezialfall der *epistemologischen Denkhürden* ist der *Natural Number Bias*. Dieser beschreibt die Tendenz von Schüler\*innen beim Umgang mit rationalen Zahlen auf die Konzepte der natürlichen Zahlen zurückzugreifen. Diese Problematik resultiert unter anderem auf einer nicht vollständig vollzogenen Zahlbereichserweiterung der natürlichen Zahlen zu den rationalen Zahlen. Vor allem die Diskontinuitäten zwischen den beiden Zahlbereiche lösen Irritationen oder Fehlvorstellungen aus. Der *NNB* spricht die Dimensionen *Dichte, Darstellung, Größe* und *Operationen* an. Neben der *Conceptual Change Theory* spielt auch die *Dual Processing Theory* eine essenzielle Rolle beim *Natural Number Bias*. Die *Dual Processing Theory* geht von zwei kognitiven Systemen aus: dem *intuitiven System* für schnelle Entscheidungen basierend auf Erfahrungen und dem *analytisch denkenden System* basierend auf aufwändigen Gedankengängen. Der *Natural Number Bias* kommt vor allem bei der Verwendung des intuitiven Systems vor.

epistemologische  
Denkhürden

Trotz der umgangssprachlichen negativen Konnotation des Begriffs *Hürden*, können *epistemologische Denkhürden* Bildungschancen bieten. Da Lernprozesse nicht linear und kumulativ ablaufen, ist das Überwinden von Denkhürden ein wesentliches Element im Lernprozess. Das Verstehen von rationalen Zahlen und deren Rechenoperationen ist ein wichtiger Schritt beim Bewältigen der Hürden. Deshalb sollten nicht nur Lösungsalgorithmen betrachtet werden, sondern eben auch Grundvorstellungen. Eine weitere Möglichkeit ist das Etablieren einer großen Palette an Lösungsstrategien und das Analysieren der Strategien bezüglich Effizienz im jeweiligen Kontext. Weiters können die Kontinuitäten beziehungsweise Diskontinuitäten zum Unterrichtsinhalt werden, sodass explizit über Gemeinsamkeiten respektive Unterschiede gesprochen werden kann. Das Analysieren von fingierten oder realen, aber fehlerhaften Lösungen kann beim Erkenntnisprozess hilfreich sein und das Überwinden der Hürden vereinfachen. Ein komplettes Überwinden der Hürden, hier vor allem vom *Natural Number Bias (NNB)*, ist laut Obersteiner et al. (2013) nahezu unmöglich, doch können Erfahrungen und Erkenntnisse im Umgang mit rationalen Zahlen den *NNB* reduzieren (Braithwaite & Siegler, 2018).

Überwinden der Hürden

entwickelte App	<p>Die entwickelte Lern-App stellt einen modellhaften Prototypen für das mediengestützte Lernen im Mathematikunterricht, welches explizit Denkhürden behandelt, dar. Die entwickelte Lern-App korrespondiert mit dem ersten Ziel der vorliegenden Arbeit (vgl. Kapitel 5). Die App soll sowohl den Schüler*innen die Möglichkeit geben, an ihren Schwierigkeiten im Bereich der Bruch- und Prozentzahlen zu arbeiten und diese gegebenenfalls zu überwinden, als auch (zukünftigen) Lehrpersonen die didaktischen Hintergründe und Intentionen aufzeigen. Als Zielgruppe der Lern-App gilt die Sekundarstufe I, da Bruch- und Prozentrechnen im Curriculum verankert ist. Durch die Wahl einer webbasierten App ist der Zugang einfach und barrierefrei, da weder Downloads oder Installationen notwendig sind. Die App wurde, der <i>Cognitive Load Theory</i> folgend, mit einem minimalistischen und übersichtlichen Design ausgestattet. Weiters soll ein Lernbegleiter in Form eines kleinen Bären die emotionale Bindung zur Lern-App erhöhen und den Schüler*innen einen weiteren <i>Ansprechpartner</i> neben der Lehrperson bieten. Für den Bereich der Bruchzahlen wurden drei Aufgaben und für den Bereich der Prozentzahlen zwei Aufgaben, basierend auf der dargelegten Literatur, entwickelt. Die Lern-App ist interaktiv und reagiert auf Benutzereingaben. Weiters wurde mit <i>reactive design</i> gearbeitet, sodass sich die Lern-App an das jeweilige Endgerät anpasst. Für die Implementierung der Lern-App wurde die Erweiterung <i>R Shiny</i> von <i>R</i> herangezogen. Automatisierte Tests wurden mithilfe des Packages <code>shinytest()</code> durchgeführt.</p>
Ergebnisse der Begleitstudie	<p>Basierend auf einem qualitativen Zugang wurde die Begleitstudie mittels Interviews mit vier Lehrpersonen aus Tirol durchgeführt. Dabei wurden die Fragen beleuchtet, ob die Lern-App praxisrelevante Schwierigkeiten der Bruch- und Prozentrechnung anspricht und ob die Lern-App adäquat für die festgelegte Zielgruppe – und dadurch praxistauglich – ist. Das Aufgreifen der praxisrelevante Denkhürden und das Verbinden mit den Grundvorstellungen ist gegeben. Die Lehrpersonen referenzierten auf das fehlende Grundverständnis der Schüler*innen, welches in den Aufgaben behandelt wird. Weiters wird auch des <i>Zahlverständnis</i> und das <i>Gefühl</i> für Zahlen angesprochen, bei welchem die App besonders unterstützend sei. Weiters ist die Lern-App passend für die Zielgruppe der Sekundarstufe I und kann basierend auf den Interviews in vielfältigen Settings eingesetzt werden. Auf Basis der Interviews kann dadurch bestätigt werden, dass das grundsätzliche Ziel der Lern-App respektive der erstellten Aufgaben erreicht wurde. Kleineren Kritikpunkten war die App ausgesetzt, jedoch bezogen sich diese vor allem auf die Benutzerfreundlichkeit und nicht per se auf die Zielerreichung.</p>
Ausblick	<p>Die entwickelte App wurde, wie beschrieben, mit Lehrpersonen getestet und diskutiert, eine groß angelegte Studie für den didaktischen Gehalt und der Wirksamkeit der Lern-App stehen aus. Weiters ist auch eine Studie zur Wirkung der Lern-App auf das Verständnis der Schüler*innen ausständig. Jedoch bietet der modellhafte Prototyp der Lern-App ein Grundgerüst für die Verbesserung, Weiterentwicklung beziehungsweise Erweiterung des mediengestützten Lernens im Mathematikunterricht. Als letzter Punkt bleibt noch offen, ob die Lern-App Einzug in die schulische Praxis finden wird und ob die Lehrpersonen gewillt sind, Übungsaufgaben explizit zu den Denkhürden und deren Überwindung in ihrem Unterricht aufzugreifen.</p>

# Kapitel 10

## Literaturverzeichnis

- Alibali, M. W., & Sidney, P. G. (2015). Variability in the natural number bias: Who, when, how, and why. *Learning and Instruction, 37*, 56–61. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2015.01.003>
- Barash, A., & Klein, R. (1996). Seventh grades students' algorithmic, intuitive and formal knowledge of multiplication and division of non-negative rational numbers. In L. Puig & A. Gutierrez (Hrsg.), *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 2, S. 35–42).
- Barratta, W., Price, B., Stacey, K., Steinle, V., & Gvozdenko, E. (2010). Percentages: The Effect of Problem Structure, Number Complexity and Calculation Format. In L. Sparrow, B. Kissane, & C. Hurst (Hrsg.), *Shaping the Future of Mathematics Education* (S. 61–68).
- Barzel, B. (2012). *Mathewerkstatt 5: Handreichung*. Cornelsen. <http://www.cornelsen.de/mathewerkstatt>
- Beer, R., Chelly, A., Ilias, P., Jilka, S., Steffan, C., & Varelija, G. (2019a). *Genial! Mathematik 1: Schulbuch* (2. Auflage). bvl.
- Beer, R., Chelly, A., Ilias, P., Jilka, S., Steffan, C., & Varelija, G. (2019b). *Genial! Mathematik 2: Schulbuch* (2. Auflage). bvl.
- Bell, A., Greer, B., Grimison, L., & Mangan, C. (1989). Children's Performance on Multiplicative Word Problems: Elements of a Descriptive Theory. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(5), 434. <https://doi.org/10.2307/749419>
- Berger, R. (1989). *Prozent- und Zinsrechnen in der Hauptschule didaktische Analysen und empirische Ergebnisse zu Schwierigkeiten, Lösungsverfahren und Selbstkorrekturverhalten der Schüler am Ende der Hauptschulzeit* [Dissertation]. Pädagogische Hochschule Freiburg.
- Beutelspacher, A. (2018). *Zahlen, Formeln, Gleichungen: Algebra für Studium und Unterricht* (1. Auflage 2018). Springer Fachmedien Wiesbaden. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-16106-4>
- BMBWF. (2019). *Pilot-Kompetenzraster für die Sekundarstufe I: Unterricht gestalten - differenzierte Rückmeldungen geben - Leistungen kompetenzorientiert beurteilen*. Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung.

- Braithwaite, D. W., & Siegler, R. S. (2018). Developmental changes in the whole number bias. *Developmental science*, 21(2). <https://doi.org/10.1111/desc.12541>
- Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Revue de Didactique des Mathématiques*, 4(2), 165–198. [http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Les\\_obstacles\\_epistemologiques\\_et\\_la\\_didactique\\_des\\_mathematiques89.pdf](http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Les_obstacles_epistemologiques_et_la_didactique_des_mathematiques89.pdf)
- Brousseau, G., Brousseau, N., & Warfield, V. (2014). *Teaching Fractions through Situations: A Fundamental Experiment* (Bd. 60). Springer Netherlands.
- Buchholtz, N. (2018). Wie können Lehrkräfte Mathematisierungskompetenzen bei Schülerinnen und Schülern fördern und diagnostizieren. In R. Borromeo Ferri & W. Blum (Hrsg.), *Lehrerkompetenzen zum Unterrichten mathematischer Modellierung*. Springer Fachmedien Wiesbaden.
- Buchholtz, N., Schwarz, B., Kaiser, G., Biehler, R., & Blum, W. (2016). Eine Analyse der sogenannten Schlussrechnung – Die Relevanz der Ansätze von Arnold Kirsch für aktuelle Lernprozesse in der Lehrerbildung. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 37(1), 31–53.
- Büchter, A., & Henn, H.-W. (2005). *Elementare Stochastik: Eine Einführung in die Mathematik der Daten und des Zufalls*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/b138982>
- Büchter, A., Klinger, M., & Osterbrink, F. (2019). Bruchrechnung. In A. Büchter (Hrsg.), *#Mathe-buddy - dein update fr studium und beruf* (S. 3–14). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-59438-4>
- Chang, W. (2021a). *shiny: Web Application Framework for R*. <https://CRAN.R-project.org/package=shiny>
- Chang, W. (2021b). *shinytest: Test Shiny Apps*. <https://cran.r-project.org/web/packages/shinytest/>
- Christou, K. P., Pollack, C., van Hoof, J., & van Dooren, W. (2020). Natural number bias in arithmetic operations with missing numbers – A reaction time study. *Journal of Numerical Cognition*, 6(1), 22–49. <https://doi.org/10.5964/jnc.v6i1.228>
- Cortina, J., Visnovska, J., & Zúniga, C. (2014). Equipartition as a didactical obstacle in fraction instruction. *Acta Didactica Universitas Comenianae*, 14(12), 1–18.
- Desmet, L., Grégoire, J., & Mussolin, C. (2010). Developmental changes in the comparison of decimal fractions. *Learning and Instruction*, 20, 521–532. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2009.07.004>
- Dewi, D. A. K., Suryadi, D., Suratno, T., Mulyana, E., & Kurniawan, H. (2017). Meaning of Fractions. *Journal of Physics: Conference Series*, 812, 012115. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/812/1/012115>
- Drollinger-Vetter, B. (2020). *Verstehenselemente und strukturelle Klarheit: Fachdidaktische Qualität der Anleitung von mathematischen Verstehensprozessen im Unterricht* (Bd. 8). Waxmann.
- Dürschnabel, K., Dürr, R., Erben, W., Gercken, M., Lunde, K., Wurth, R., & Zimmermann, M. (Hrsg.). (2019). *So viel Mathe muss sein: Gut vorbereitet in ein WiMINT-Studium*.
- Eichelmann, A., Narciss, S., Schnaubert, L., & Melis, E. (2012). Typische Fehler bei der Addition und Subtraktion von Brüchen – Ein Review zu empirischen Fehleranalysen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 33(1), 29–57. <https://doi.org/10.1007/s13138-011-0031-5>



- Eilebrecht, K., & Starke, G. (2019). *Patterns kompakt: Entwurfsmuster für effektive Softwareentwicklung* (5. Aufl. 2019). Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-57937-4>
- Fauzi, I., & Suryadi, D. (2020). Learning Obstacle the Addition and Subtraction of Fraction in Grade 5 Elementary Schools. *MUDARISSA: Jurnal Kajian Pendidikan Islam*, 12(6), 50–67.
- Feijs, E., Figueiredo, N., Gravemeijer, K., van Herpen, E., & Keijzer, R. (2008). *Fractions, Percentages, Decimals and Proportions: A Learning- Teaching Trajectory for Grade 4, 5 and 6* (Bd. v.3). Sense Publishers. <https://ebookcentral.proquest.com/lib/gbv/detail.action?docID=5313335>
- Floderer, M., Köblinger, J., Koss-Thosol, E.-M., & Reiter, A. (2013). *Mach mit Mathematik PTS: Schulbuch*. öbv.
- Greefrath, G. (2018). *Anwendungen und Modellieren im Mathematikunterricht*. Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-57680-9>
- Griesel, H., vom Hofe, R., & Blum, W. (2019). Das Konzept der Grundvorstellungen im Rahmen der mathematischen und kognitionspsychologischen Begrifflichkeit in der Mathematikdidaktik. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 40(1), 123–133. <https://doi.org/10.1007/s13138-019-00140-4>
- Gudladt, P. (2020). Deutungsperspektiven zum Prozentbegriff: Erste Ergebnisse einer empirischen Untersuchung. In A. Frank, S. Krauss, & K. Binder (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2019* (S. 285–288). WTM Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien.
- Gudladt, P. (2021). *Inhaltliche Zugänge zu Anteilsvergleichen im Kontext des Prozentbegriffs: Theoretische Grundlagen und eine Fallstudie*. Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-32447-6>
- Hafner, T. (2012). *Proportionalität und Prozentrechnung in der Sekundarstufe I : Empirische Untersuchung und didaktische Analysen*. Springer Fachmedien Wiesbaden.
- Hartl, K. (2013). *Lern-Apps für Vorschulkinder: Entwicklung von Gestaltungs-Guidelines und Evaluation von bestehenden Systemen* [Diplomarbeit]. Technische Universität Wien; Institut für Gestaltungs- und Wirkungsforschung.
- Heckmann, K., & Padberg, F. (2007). Zur Entwicklung des Dezimalbruchverständnisses bei Schülerinnen und Schüler der Klasse 6. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007* (S. 199–202). Franzbecker.
- Hefendehl-Hebeker, L., & Prediger, S. (2006). Unzählig viele Zahlen: Zahlbereiche erweitern - Zahlvorstellungen wandeln. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 48(11), 1–7.
- Heinrichs, H. (2015). *Diagnostische Kompetenz von Mathematik-Lehramtsstudierenden*. Springer Fachmedien Wiesbaden. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-09890-2>
- Herden, G., & Pallack, A. (2000). Zusammenhänge zwischen verschiedenen Fehlerstrategien in der Bruchrechnung. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 21(3-4), 259–279. <https://doi.org/10.1007/BF03338921>
- Hußmann, S. (2019). Durchgängige Kontextorientierung in allen Unterrichtsphasen des Mathematikunterrichts. In A. Büchter, M. Glade, R. Herold-Blasius, M. Klinger, F. Schacht, & P. Scherer (Hrsg.), *Vielfältige Zugänge Zum Mathematikunterricht* (S. 47–60). Spektrum Akademischer Verlag GmbH.

- Kleine, M. (2009). Kompetenzdefizite von Schülerinnen und Schülern im Bereich des Bürgerlichen Rechnens. In A. Heinze & M. Grüßing (Hrsg.), *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium* (S. 147–155). Waxmann.
- Kleine, M., & Jordan, A. (2007). Lösungsstrategien von Schülerinnen und Schülern in Proportionalität und Prozentrechnung — eine korrespondenzanalytische Betrachtung. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 28(3-4), 209–223. <https://doi.org/10.1007/BF03339346>
- Liebal, J., & Exner, M. (2011). *Usability für Kids: Ein Handbuch zur ergonomischen Gestaltung von Software und Websites für Kinder* (1. Aufl.). Vieweg+Teubner Verlag / Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH Wiesbaden. <https://doi.org/10.1007/978-3-8348-8206-6>
- Madasu, V., Venna, T., & Eltaeib, T. (2015). SOLID Principles in Software Architecture and Introduction to RESM Concept in OOP. *JMEST: Journal of Multidisciplinary Engineering Science and Technology*, 2(2).
- Malle, G. (2004). Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. *Mathematik lehren*, 123, 4–8.
- Misquitta, R. (2011). A Review of the Literature: Fraction Instruction for Struggling Learners in Mathematics. *Learning Disabilities Research & Practice*, 26(2), 109–119. <https://doi.org/10.1111/j.1540-5826.2011.00330.x>
- Motzer, R. (2018). *Brüche, Verhältnisse und Wurzeln: Grundlagen wiederentdecken und interessante Anwendungen neu kennenlernen*. Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-20370-2>
- Ni, Y., & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and Learning Fraction and Rational Numbers: The Origins and Implications of Whole Number Bias. *Educational Psychologist*, 40(1), 27–52. <https://doi.org/10.1207/s15326985ep4001{\textunderscore}3>
- Noll, A. (2020). Theoretischer Hintergrund. In A. Noll (Hrsg.), *Lesebarrieren in einem inklusiven Mathematikunterricht überwinden* (S. 5–72). Springer Fachmedien Wiesbaden. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-28605-7{\textunderscore}2>
- Obersteiner, A., van Dooren, W., van Hoof, J., & Verschaffel, L. (2013). The natural number bias and magnitude representation in fraction comparison by expert mathematicians. *Learning and Instruction*, 28, 64–72. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2013.05.003>
- Obersteiner, A., van Hoof, J., Verschaffel, L., & van Dooren, W. (2016). Who can escape the natural number bias in rational number tasks? A study involving students and experts. *British journal of psychology (London, England : 1953)*, 107(3), 537–555. <https://doi.org/10.1111/bjop.12161>
- Padberg, F. (1986). Über typische Schülerschwierigkeiten in der Bruchrechnung - Bestandsaufnahme und Konsequenzen. *MU: Der Mathematikunterricht*, 3, 58–77.
- Padberg, F. (2009). *Didaktik der Arithmetik: Für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung* (3., erw., völlig überarb. Aufl., Nachdr.). Elsevier, Spektrum Akad. Verl.
- Padberg, F. (2012). *Didaktik der Bruchrechnung: [für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung]* (4. Aufl., Nachdr.). Springer-Spektrum.
- Padberg, F., & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Bruchrechnung*. Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-52969-0>

- Pitkethly, A., & Hunting, R. (1996). A review of recent research in the area of initial fraction concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 30(1), 5–38. <https://doi.org/10.1007/BF00163751>
- Pöhler, B. (2018). *Konzeptuelle und lexikalische Lernpfade und Lernwege zu Prozenten: Eine Entwicklungsforschungsstudie*. Springer Fachmedien Wiesbaden. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-21375-6>
- Pöhler, B. (2014). Umgang mit Prozentaufgaben - Herausforderungen für konzeptuelles Verständnis und Leseverständnis. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 923–926).
- Pöschel, J. (2014). *Etwas Analysis: Eine Einführung in die eindimensionale Analysis*. Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-05799-2>
- Prediger, S. (2001). Brüche bei den Brüchen - aufgreifen oder umschiffen? *Mathematik lehren*, 123, 10–13. <https://www.mathematik.uni-dortmund.de/~prediger/veroeff/04-ml-brueche-langfassung.pdf>
- Prediger, S. (2006a). Continuities and Discontinuities for Fractions: A Proposal for Analysing in Different Levels. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Hrsg.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (S. 377–384).
- Prediger, S. (2006b). Vorstellungen zum Operieren mit Brüchen entwickeln und erheben: Vorschläge für vorstellungsorientierte Zugänge und diagnostische Aufgaben. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 48(11).
- Prediger, S. (2007). Konzeptwechsel in der Bruchrechnung - Analyse individueller Denkweise aus konstruktivistischer Sicht. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007* (S. 203–206). Franzbecker.
- Prediger, S. (2008). The relevance of didactic categories for analysing obstacles in conceptual change: Revisiting the case of multiplication of fractions. *Learning and Instruction*, 18(1), 3–17. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2006.08.001>
- Prediger, S. (2011). Vorstellungsentwicklungsprozesse initiieren und untersuchen: Einblicke in einen Forschungsansatz am Beispiel Vergleich und Gelichwertigkeit von Brüchen in der Streifentafel. *MU: Der Mathematikunterricht*, 57(3), 5–14.
- R Core Team. (2019). *The R Graphics Package*. R Foundation for Statistical Computing. <http://www.R-project.org/>
- Reinhold, F. (2019). *Wirksamkeit von Tablet-PCs bei der Entwicklung des Bruchzahlbegriffs aus mathematikdidaktischer und psychologischer Perspektive: Eine empirische Studie in Jahrgangsstufe 6* ([1. Auflage]). Springer Spektrum.
- Reinhold, F., & Reiss, K. (2020). Anschauliche Wege zum Größenvergleich von Brüchen. *Zeitschrift für Mathematikdidaktik in Forschung und Praxis*, 1. [https://zmf.de/fileadmin/user\\_upload/veroeffentlichungen/ZMFP\\_2020\\_1\\_Reinhold\\_Reiss.pdf](https://zmf.de/fileadmin/user_upload/veroeffentlichungen/ZMFP_2020_1_Reinhold_Reiss.pdf)
- Reinhold, F., Obersteiner, A., Hoch, S., Hofer, S. I., & Reiss, K. (2020). The Interplay Between the Natural Number Bias and Fraction Magnitude Processing in Low-Achieving Students. *Frontiers in Education*, 5. <https://doi.org/10.3389/educ.2020.00029>
- Reiss, K., & Schmieder, G. (2014). *Basiswissen Zahlentheorie: Eine Einführung in Zahlen und Zahlbereiche* (3., überarbeitete Auflage). Springer Berlin Heidelberg.

- Roell, M., Viarouge, A., Houdé, O., & Borst, G. (2017). Inhibitory control and decimal number comparison in school-aged children. *PloS one*, *12*(11), e0188276. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0188276>
- Rollnik, S. (2009). *Das pragmatische Konzept für den Bruchrechnenunterricht* [Dissertation, Universität Flensburg; Insitut für Mathematik und ihre Didaktik]. <https://d-nb.info/1018284176/34>
- Rosenthal, I., Ilany, B.-S., & Almog, N. (2009). Intuitive Knowledge of Percentages Prior to Learning. *Research in Mathematical Education*, *13*(4), 297–307.
- Sander, E., & Berger, M. (1985). Fehleranalysen bei Sachaufgaben zur Prozentrechnung: Zwei Explorationsstudien. *PEU: Psychologie in Erziehung und Unterricht*, *32*(1), 254–262.
- Sbaragli, S., Arrigo, G., D’Amore, B., Fandino Pinilla, M. I., Frapolli, A., Frigerio, D., & Villa Oliver. (2011). Epistemological and Didactic Obstacles: the influence of teachers’ beliefs on the conceptual education of students. *Mediterranean journal for research in mathematics education*, *10*, 61–102.
- Schink, A. (2013). *Flexibler Umgang mit Brüchen*. Springer Fachmedien Wiesbaden. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-00921-2>
- Schink, A., & Meyer, M. (2013). Teile vom Ganzen - Brüche beziehungsreich verstehen. *PM: Praxis der Mathematik in der Schule*, *55*(52), 2–8.
- Schlögl, A. (2018). *Identifikation von Lösungskonzepten beim Größenvergleich von Brüchen* [Diplomarbeit, Karl-Franzens-Universität Graz]. <https://unipub.uni-graz.at/obvugrhs/content/titleinfo/2581817>
- Schubert, M. (2012). *Mathematik für Informatiker: Ausführlich erklärt mit vielen Programmbeispielen und Aufgaben* (2., überarb. und erw. Aufl.). Vieweg+Teubner Verlag.
- Siegert, J. (2018). *Mathematik trainieren: Brüche, Funktionen und Co*. Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-56348-9>
- Sievert, C. (2021). *plotly: Create Interactive Web Graphics via 'plotly.js'*. <https://cran.r-project.org/web/packages/plotly/>
- Sprenger, L. (2017). *Zum Begriff des Dezimalbruchs: Eine empirische Studie zum Dezimalbruchverständnis aus inferentialistischer Perspektive* [Dissertation]. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-19160-3>
- Stampfer, F., Reitz-Koncebovski, K., & Hell, T. (2019). Feststellung und Entwicklung des Natural Number Bias bei Lehramtsstudierenden in der fachdidaktischen Ausbildung. In A. Frank, S. Krauss, & K. Binder (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2019* (S. 781–784). WTM-Verlag.
- Streit, C., & Barzel, B. (2013). Die Mischung macht’s: Verhältnisse und Brüche - ein ambivalentes Verhältnis? *Mathematik lehren*, *179*, 9–10.
- Strucksberg, J., & Prediger, S. (2018). Spezifizierung von Verstehensgrundlagen von Prozenten und ihr Nutzen für den inklusiven Mathematikunterricht. In P. Bender & T. Wassong (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018* (S. 1763–1766). WTM-STEIN.
- Toenniessen, F. (2019). *Das Geheimnis der Transzendenten Zahlen: Eine Etwas Andere Einführung in Die Mathematik* (2nd ed.). Springer.

- Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2010). How Many Decimals Are There Between Two Fractions ? Aspects of Secondary School Students' Understanding of Rational Numbers and Their Notation. *Cognition and Instruction*, 28(2), 181–209. <https://doi.org/10.1080/07370001003676603>
- van Hoof, J., Janssen, R., Verschaffel, L., & van Dooren, W. (2015a). Inhibiting natural knowledge in fourth graders: towards a comprehensive test instrument. *ZDM*, 47(5), 849–857. <https://doi.org/10.1007/s11858-014-0650-7>
- van Hoof, J., Verschaffel, L., & van Dooren, W. (2015b). Inappropriately applying natural number properties in rational number tasks: characterizing the development of the natural number bias through primary and secondary education. *Educational Studies in Mathematics*, 90(1), 39–56. <https://doi.org/10.1007/s10649-015-9613-3>
- Vohns, A. (2005). Fundamentale Ideen und Grundvorstellungen: Versuch einer konstruktiven Zusammenführung am Beispiel der Addition von Brüchen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 26(1), 52–79. <https://doi.org/10.1007/BF03339006>
- vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte: Zugl.: Kassel, Univ. Gesamthochsch., Diss., 1994*. Spektrum Akademischer Verlag.
- vom Hofe, R., & Blum, W. (2016). „Grundvorstellungen“ as a Category of Subject-Matter Didactics. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 37(S1), 225–254. <https://doi.org/10.1007/s13138-016-0107-3>
- vom Hofe, R., Lotz, J., & Salle, A. (2015). Analysis: Leitidee Zuordnung und Veränderung. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 149–184). Springer Spektrum.
- Wartha, S. (2007). Längsschnittliche Analysen zur Entwicklung des Bruchzahlbegriffs. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 28(3-4), 341–342. <https://doi.org/10.1007/BF03339357>
- Wartha, S. (2009). Zur Entwicklung des Bruchzahlbegriffs — Didaktische Analysen und empirische Befunde. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 30(1), 55–79. <https://doi.org/10.1007/BF03339073>
- Wartha, S., & Güse, M. (2009). Zum Zusammenhang zwischen Grundvorstellungen zu Bruchzahlen und arithmetischem Grundwissen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 30(3/4), 256–280.
- Wartha, S., & Wittmann, G. (2009). Lernschwierigkeiten im Bereich der Bruchrechnung und des Bruchzahlbegriffs. In A. Fritz & S. Schmidt (Hrsg.), *Fördernder Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I* (S. 73–108). Beltz.
- Wickham, H. (2021). *Mastering Shiny: Build interactive apps, reports, and dashboards powered by R* (First edition). O'Reilly.
- Wijaya, A. P., Yunarti, T., & Coesamin, M. (2019). The analyzing of students' learning obstacles in understanding proportion. *Journal of Physics: Conference Series*, 1280. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1280/4/042022>
- Winter, H. (1999). *Mehr Sinnstiftung, mehr Einsicht, mehr Leistungsfähigkeit im Mathematikunterricht, dargestellt am Beispiel der Bruchrechnung*. <http://blk.mat.uni-bayreuth.de/material/db/37/bruchrechnung.pdf>
- Wittmann, G. (2006). Grundvorstellungen zu Bruchzahlen - auch für leistungsschwache Schüler? Eine mehrperspektivische Interviewstudie zu Lösungsprozessen, Emotionen und Beliefs in der Haupt-

schule. *mathematica didactica*, 29(2), 49-74. [http://mathematica-didactica.com/altejahrgaenge/md\\_2006/md\\_2006\\_2\\_Wittmann\\_Grundvorstellungen.pdf](http://mathematica-didactica.com/altejahrgaenge/md_2006/md_2006_2_Wittmann_Grundvorstellungen.pdf)

# Kapitel 11

## Anhang

### 11.1 Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre hiermit an Eides statt durch meine eigenhändige Unterschrift, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe. Alle Stellen, die wörtlich oder inhaltlich den angegebenen Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht.

Die vorliegende Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form noch nicht als Magister-/Master-/Diplomarbeit/Dissertation eingereicht.

---

Datum und Unterschrift

## 11.2 Entwurf der GUI

### Aufgabe “Einbinden des Zahlenstrahls”

The wireframe illustrates a GUI for task management, consisting of two task cards. Each card is enclosed in a rounded rectangle and contains the following elements from top to bottom:

- Task Card 1 (Top):**
  - A small grey square button with the letter 'i' in the top right corner.
  - A white rectangular box containing the text "Überschrift und Erklärungstext".
  - A white rectangular box containing the text "Aufgabe 1 (Überschrift und Erklärungstext)".
  - A white rectangular box containing the text "Aufgabenstellung" on the left and three radio buttons labeled "leicht", "mittel", and "schwierig" on the right.
  - A large white rectangular box containing the text "Plot des interaktiven Zahlenstrahls".
  - A row of four buttons: "Btn „Erklärung“" (grey), "Btn „Hilfe“" (blue), "Btn „Neu“" (orange), and "Btn „Check“" (green).
- Task Card 2 (Bottom):**
  - A white rectangular box containing the text "Aufgabe 2 (Überschrift und Erklärungstext)".
  - A white rectangular box containing the text "Aufgabenstellung".
  - A large white rectangular box containing the text "Plot des Zahlenstrahls".
  - A row of three buttons: "Btn „Erklärung“" (grey), "Btn „Hilfe“" (blue), and "Btn „Check“" (green).

A second small grey square button with the letter 'i' is located in the bottom right corner of the entire GUI layout.



## Aufgabe “Vergrößern und Verkleinern”

The GUI layout for the task "Vergrößern und Verkleinern" consists of the following elements:

- A top-right information icon (i).
- A main header box containing "Überschrift und Erklärungstext".
- A sub-header box containing "Aufgabenstellung".
- A row of three radio buttons:  Faktor 1,  Faktor 2,  Faktor 3.
- Two side-by-side image placeholders: "Bild in Originalgröße" on the left and "Bild in veränderter Größe" on the right.
- A row of four buttons: "Btn „Erklärung“" (grey), "Btn „Hilfe“" (blue), "Btn „Neu“" (orange), and "Btn „Check“" (green).
- A bottom-right information icon (i).

## Aufgabe “Anteil diskreter Ganzer”

The GUI layout for the task "Anteil diskreter Ganzer" consists of the following elements:

- A top-right information icon (i).
- A main header box containing "Überschrift und Erklärungstext".
- A sub-header box containing "Aufgabenstellung".
- A large central plot area containing the text "Plot der Punktwolke als diskretes Ganzes".
- A row of four buttons: "Btn „Erklärung“" (grey), "Btn „Hilfe“" (blue), "Btn „Neu“" (orange), and "Btn „Check“" (green).
- A bottom-right information icon (i).

### Aufgabe “Einbinden des Prozentstreifens”

i

Überschrift und Erklärungstext

Aufgabenstellung  leicht  schwierig

[conditional panel]

Anzeigen von:  10%-Schritten  10er-Schritten  Anzeigen des Ganzen

Plot des interaktiven Zahlenstrahls

Btn „Erklärung“ Btn „Hilfe“ Btn „Neu“ Btn „Check“

i

### Aufgabe “Zusammenspiel von Grundwert, Prozentwert und Porzentsatz”

i

Überschrift und Erklärungstext

Aufgabenstellung  leicht  mittel  schwierig

Plot des Prozentstreifens I

Plot des Prozentstreifens II

Plot des Prozentstreifens III

Checkbox  Checkbox  Checkbox

Btn „Erklärung“ Btn „Hilfe“ Btn „Neu“ Btn „Check“

i

## 11.3 Transkripte der Interviews

### 11.3.1 Protokoll I

Dieses Interview fand an einer Mittelschule im städtischen Raum statt. Interviewt wurden zwei Lehrpersonen gleichzeitig. Im Interviewtranskript werden die beiden Lehrpersonen mit *L1* und *L2* referenziert. Fragen des Interviewers sind mit *I* gekennzeichnet. Der Interviewer ist mit den Lehrpersonen per Du. Das Transkript ist von allen dialektal gefärbten Aussagen und Füllwörtern bereinigt. Denk- oder Bearbeitungsphasen sind durch [...] dargestellt.

Nr.		
1	I	Bevor wir beginnen möchte ich mich bedanken, dass ihr euch bereit dazu erklärt habt, meine App zu testen. Und natürlich auch für den kurzfristigen Termin.
2	L1	Das ist kein Problem, ich bin schon sehr gespannt, was du erstellt hast.
3	L2	Das passt gut.
4	I	Danke. Als Vorführeffekt benötigt die App jetzt natürlich mehr Zeit zum Laden als sonst. Später wird die App auf einem Server liegen und dann sollte es etwas schneller gehen.
5	L1	Lass dir Zeit. Wir haben in der Schule schon genug Stress, das brauchen wir jetzt nicht auch.
6	I	Dann sage ich in der Zwischenzeit kurz etwas zur App. Ich habe im Bereich Bruch- und Prozentrechnung ein paar Aufgaben erstellt. Die Aufgaben beziehen sich auf Schwierigkeiten, die ich in der Literatur gefunden habe. Gedacht ist die App für die Sekundarstufe I und da vor allem für die erste und zweite Klasse.
7	L1	Darf die App nur in den ersten beiden Klassen verwendet werden?
8	L2	Weil das Prozentrechnen kommt in der dritten Klasse auch wieder vor.
9	I	Die App kann dort eingesetzt werden, wo die Themen besprochen werden. Natürlich auch in der dritten Klasse. Die Aufgaben passen aber eher auf den Lehrplan der ersten beiden Klassen.
10	L1	Ach so, ich dachte schon, dass sie nur dann einsetzbar ist.
11	I	Nein, das möchte ich nicht einschränken. Aber nun ist die App endlich geladen. Dann würde ich euch einfach die Maus übergeben, sodass ihr selbst alles ausprobieren könnt.
12	L2	Gut, dann beginnen wir einmal.
-	-	— Betrachtung der Startseite —
13	L1	Nach der Beschreibung der Buttons scheint es viele Möglichkeiten der App zu geben. Ich bin gespannt, wie es weitergeht.
14	L2	Wie kommt man zu den anderen Bereichen?
15	I	Die Bereiche sind oben über die Menüleiste erreichbar. Die Aufgaben sind in die Bereiche Bruch- und Prozentrechnen aufgeteilt.
16	L1	Ah ja, da sind die Aufgaben. Eigentlich leicht zu finden.
17	L2	Dann gehen wir diese einfach nacheinander durch, oder?
18	L1	Ja, willst du oder soll ich.
19	L2	Mach du.
-	-	— Zahlenstrahl - Aufgabe Einzeichnen —

---

Nr.	-	-
20	L1	Dann lesen wir mal den Text bei der Zahlenstrahl-Aufgabe. Warum sind dort so komische Formeln?
21	I	Hmm, gute Frage. Eigentlich sollten dort die Bruchzahlen korrekt angezeigt werden. Aber scheinbar ist MathJax nicht geladen. Komisch. . .
22	L2	Dann sagst du uns einfach, was dort stehen sollte.
23	I	Ich probiere einen kurzen Systemneustart und hoffe, dass es dann besser ist und alternativ kann ich dann natürlich übersetzen.
-	-	— Systemneustart —
24	I	Toll, scheinbar hat der Systemneustart auch nichts genützt.
25	L2	Wir können und ja vorstellen, was da eigentlich stehen sollte.
26	L1	Ich schätze mal, dass bei der Aufgabe $\frac{1}{2}$ gesucht ist.
27	I	Ja, genau. Für die Schüler sollte es dann natürlich korrekt angezeigt werden.
28	L2	Und der Zahlenstrahl geht über 1 hinaus.
29	L1	Dann müssen unsere Schüler sicher zweimal überlegen. Was passiert, wenn ich auf Hilfe klicke? Hm, ich sehe gar keine Änderung.
30	I	Die Hilfe zeichnet Unterteilungen passend zum Nenner ein.
31	L2	Und sonst passiert nichts?
32	I	Was soll sonst noch passieren?
33	L2	Wenn du es nicht dazu gesagt hättest, hätte ich das nicht gesehen.
34	L1	Stimmt, kann man da noch was anzeigen?
35	I	Wäre es hilfreich, wenn ein Fenster angezeigt wird, welches die Hilfe beschreibt?
36	L2	Ja, irgendwas Optisches dazu wäre gut.
37	L1	Aber kann man das so einfach ändern?
38	I	Ja, ich kann solche Meldungen einfach dazuprogrammieren.
39	L2	Mit was hast du das gemacht?
40	I	Ich habe <i>R Shiny</i> benutzt. Das ist eine Erweiterung von <i>R</i> . Also der Statistiksoftware für Mathematiker*innen.
41	L2	Das sagt mir nichts.
42	L1	Ah, das ist programmiert. Ich dachte es ist vielleicht mit GeoGebra oder so. Aber zurück zur Aufgabe. Generell sind die Unterteilungen als Hilfe sinnvoll.
43	L2	Und sie sind immer auf die Angabe bezogen?
44	I	Ja, genau. Für $\frac{1}{2}$ werden beispielsweise alle 0,5 Unterteilungen eingezeichnet.
45	L1	Gut, dann probieren wir die Aufgabe aus. Mit der Hilfe ist es dann leicht für uns. [...] Genau getroffen. Dann wollen wir eine neue Aufgabe.
46	L2	Und die Hilfe ist jetzt nicht mehr dabei.
47	L1	Ja, das ist sinnvoll. Jetzt klicke ich mal irgendwohin, so dass es falsch ist. [...] Ah, dann wird das Feld rot.
38	I	Genau, ich habe mit Farben gearbeitet. Sobald das Intervall grün ist, ist die Antwort korrekt und sonst eben nicht.
39	L1	Aber gibt es auch so was wie Lob?
40	I	Ja, sobald man auf <i>Überprüfen</i> klickt, kommt unten am Fenster ein Feedback.
41	L1	Ah, dort unten. Ja, das habe ich nicht gesehen.
42	I	Es wird standardmäßig dort unten angezeigt.

Nr.	-	-
43	L1	Sobald man es einmal gesehen hat, weiß man ja dann, wohin man schauen muss. Jetzt probieren wir das auch noch ohne Hilfe aus. Ich bin neugierig, ob wir das richtig machen.
44	L2	Es sind $\frac{14}{9}$ also mal eindeutig über 1. Und dann sind es noch $\frac{5}{9}$ .
45	L1	Also etwas über die Hälfte. Ungefähr da. [...] Und zwar genau an der Stelle, das haben wir gut gemacht.
46	L2	Muss man immer genau die richtige Zahl am Zahlenstrahl anklicken, dass es richtig ist?
47	I	Nein, das wäre wirklich schwierig. Ich habe es mit einem Toleranzintervall gemacht. Also alles was innerhalb der Intervallgrenzen ist, ist richtig. Die Schwierigkeitsstufen verändern dann einfach die Breite des Intervalls.
38	L1	Also bezieht sich die Schwierigkeit dann auf die Genauigkeit beim Einzeichnen.
39	I	Genau.
40	L1	Das ist eine nette Aufgabe, die ich mir gut vorstellen kann. Gehen wir weiter?
41	L2	Ja.
-	-	— Zahlenstrahl - Aufgabe Einzeichnen —
42	L1	Das verstehe ich nicht ganz. Was soll das heißen, ob das das Einzige Beispiel ist?
43	I	Das ist eine Aufgabe, bei der die Schüler überlegen sollen, warum an einer Stelle am Zahlenstrahl mehrere Brüche stehen können.
44	L2	Und wie wissen sie dann die Lösung?
45	I	Bei Klick auf <i>Lösung</i> wird diese angezeigt.
46	L1	Dann würde ich die Aufgabe etwas genauer beschreiben, beispielsweise mit “Überlege zuerst und überprüfe dann mit der Lösung”.
47	I	Ja, das sollte ich vielleicht genauer beschreiben.
48	L1	Das sind keine Aufforderungen, dass du alles ausbessern musst. Wir sagen einfach, was uns auffällt.
49	I	Das passt gut. Umso mehr Feedback ich bekomme, umso besser kann ich die App entwickeln.
50	L1	Gut. Bei der Aufgabe hätte ich mir erwartet, dass ich irgendwas eingeben kann. Nur das Weiterschieben kommt mir etwas wenig vor. Aber das ist meine Meinung.
51	I	Die Aufgabe ist dazu gedacht, dass die Schüler eine Idee von den Äquivalenzklassen bekommen. Und damit die Programmierung einfach bleibt, habe ich nur einen Schieberegler gemacht.
52	L1	Die Aufgaben waren sicher schon so genug Arbeit. Was ist das <i>i</i> ?
53	I	Beim <i>i</i> kommt man noch zur didaktischen Erklärung für Lehrpersonen.
-	-	— Wechsel zu Didaktik-Seite —
54	L1	Aber was hat sich jetzt geändert?
55	L2	An der Seite steht jetzt noch ein Text.
56	I	Genau. Dabei werden die didaktischen Hintergründe der Aufgabe erklärt und welche Denkhürden angesprochen werden.
57	L1	Ah jetzt, ich war so auf die Aufgabe fokussiert.
58	L2	Können das die Schüler dann auch sehen oder nur die Lehrer?
59	I	Jeder der auf das <i>i</i> klickt, kann die didaktische Erklärung sehen.
60	L2	Mir würde es besser gefallen, wenn es eine Lehrer- und eine Schülerversion geben würde.

Nr.	-	-
61	I	Das habe ich mir zunächst auch überlegt, aber dann für diese Aufteilung entschieden.
62	L1	Ja, kann man sicher auch so machen. Gehen wir dann zur nächsten Aufgabe?
63	L2	Ja, das ist dann <i>Skalieren</i> , oder?
64	L1	Ja.
-	-	— Skalieren —
65	L2	Das Wort “skalieren” kennen unsere Schüler gar nicht, oder?
66	L1	Nein, das kennen unsere Schüler wirklich nicht.
67	L2	Im Satz ist ein Schreibfehler. Es kommt zweimal “gegeben” hintereinander vor.
68	I	Danke, das ist mir gar nicht aufgefallen.
69	L2	So etwas fällt mir immer auf. Bei der Aufgabe muss dann einfach der richtige Faktor ausgewählt werden?
70	I	Ja, genau. Die stehen direkt neben der Frage.
71	L1	Also in diesem Fall ist die Lösung 0,8. [...] Beim <i>Überprüfen</i> wird auch ein kleiner grüner Haken bei der Aufgabe angezeigt. Da erkennt man gut, dass man richtig liegt.
72	L2	Was passiert bei <i>Hilfe</i> ?
73	L1	Da werden noch Achsen für die Skalierung angezeigt. Obwohl das vielleicht ein paar Schüler übersehen könnten. Aber immerhin kann man es gut vergleichen. Dann schauen wir uns eine neue Aufgabe an. [...] Sollte die Hilfe dann nicht ausgeschaltet werden?
74	I	Ja, das sollte eigentlich passieren. Das muss ich mir nochmals ansehen.
75	L2	Wenn die Hilfe so verschwindet, wie bei der ersten Aufgabe, wäre es sicher besser. Aber sonst passt die Aufgabe gut.
76	L1	Wird bei der Erklärung direkt das Beispiel verwendet?
77	I	Nein, bei der allgemeinen Erklärung wird ein statisches Beispiel verwendet. Sodass die Schüler zwar einen Hinweis haben, wie man solche Aufgaben löst, aber noch selbst den Transfer zur Aufgabenstellung machen müssen.
78	L1	Ja, das klingt gut. Aber das ist nicht das für die Lehrer, oder?
79	I	Nein, die didaktische Erklärung zielt auf die Hintergründe der Aufgabe ab und ist nicht über den Button <i>Erklärung</i> , sondern über das <i>i</i> erreichbar.
80	L1	Ah, ja. Dann ist diese Erklärung direkt für die Schüler.
81	L2	Aber ob unsere Schüler die Sprache verstehen, da sie kein so hohes Niveau gewöhnt sind.
82	L1	Das stimmt, die Sprache haben wir sehr reduzieren müssen. Gerade schwächere Schüler könnten damit Schwierigkeiten haben. Die besseren Schüler verstehen das schon.
83	I	Ich war oder besser gesagt bin mir noch unsicher, ob die Sprache nicht zu schwierig ist. Aber es war für mich auch sehr schwierig, die Erklärungen zwar mathematisch richtig aber immer noch so verständlich zu schreiben, dass die Schüler das verstehen könnten.
84	L1	Ja, Aufgaben selbst schreiben ist immer schwierig. Vor allem da das Niveau in den unterschiedlichen Schulen unterschiedlich sein kann. Aber wie gesagt, bessere Schüler verstehen das sicher. Dann schauen wir mal weiter.

---

Nr.	-	-
-----	---	---

---

-	-	— Anteil diskreter Ganzer —
85	L2	Anteil diskreter Ganzer, da bin ich gespannt.
86	L1	Bei der Aufgabe müssen dann einfach so viele Punkte markiert werden, wie der Bruch vorgibt, oder?
87	I	Ja, genau. Du kannst die Punkte entweder anklicken oder mit Linksklick Felder aufziehen.
88	L1	Dann mache ich es zuerst mal falsch [...]. Und jetzt habe ich zwar das Feedback, dass es falsch war, aber wie geht es weiter?
89	I	Die Aufgabe kann so oft probiert werden, bis sie richtig ist.
90	L2	Das würde ich dann vielleicht noch bei der Aufgabenstellung ergänzen, sonst ist das nicht ganz klar.
91	I	Ja, das ist eine gute Idee.
92	L1	Und wenn ich es richtig mache, werden die Punkte grün, nachdem ich es überprüft habe. Da sieht man dann ganz klar, dass es richtig ist. Dann schauen wir uns mal eine neue Aufgabe an [...]. Das sind schon mehr Punkte. Was macht die <i>Hilfe</i> ?
93	L2	Ah, da werden die Punkte gruppiert. Das ist übersichtlich.
94	L1	Wie komme ich wieder auf die normale Darstellung.
95	I	Einfach nochmal auf <i>Hilfe</i> klicken.
96	L1	Ist das immer so? Vielleicht solltest du das auch noch ergänzen. Ich hätte es nicht gewusst.
97	I	Ja, das könnte ich noch ergänzen.
98	L1	Aber ansonsten ist es eine gute Übungsaufgabe.
99	I	Dankeschön.
100	L2	Das waren dann alle Aufgaben bei den Bruchzahlen, oder?
101	I	Ja, genau.
-	-	— Prozentwerte am Prozentstreifen —
102	L2	Sagt man “50% von 80”?
103	L1	Ja, das steht in jedem von unseren Schulbüchern. Ich kenne das schon.
104	L2	Ja? Vielleicht kommt es mir nur gerade komisch vor.
105	L1	Ich würde die Formulierung so lassen, die kenne die Schüler und die passt.
106	L2	Ist beim Prozentstreifen wirklich das 80 beispielsweise wichtig? Ich muss mir ja eigentlich nur 50% des Streifens ansehen.
107	I	Ja, in der einfachen Schwierigkeitsstufe stimmt das. Wenn wir uns aber die schwierigeren Aufgaben ansehen, entspricht der Streifen eben nicht mehr 100% sondern ist größer.
108	L1	Dann müssen die Schüler zuerst den Grundwert abschätzen und dann noch den Anteil. Das ist eine wirklich anspruchsvolle Aufgabe. Was ist unter <i>Hilfe</i> ? [...] Ah, da können Schritte oder das Ganze angezeigt werden. Das ist bei der Aufgabe wirklich sinnvoll.
109	L2	Klick mal auf eine <i>neue Aufgabe</i> . [...] Hier verschwindet die Hilfe auch wieder.
110	L1	Ja, das war bis jetzt immer so, bis auf das eine mal. Aber wenn wir uns eine leichter Aufgabe aussuchen, ist ein erhöhter Grundwert auch wieder schwierig für unsere Schüler.
111	I	Also würdet ihr sagen, dass Prozentsätze über 100% eigentlich auch schon zu den schwierigen Aufgaben gehören?

---

Nr.	-	-
112	L2	Wenn ich an unsere Schüler denken, dann ja. Die Aufgaben sind schwierig, aber passen schon.
113	L1	Gut, dann wechsele ich zur nächsten Aufgabe.
-	-	— Grundbegriffe —
114	L1	Ist der Prozentwerte nicht der Anteil?
115	L2	Nein, der Prozentwert und der Prozentsatz sind das gleiche. Das passt so.
116	I	Ich bin selber auch über die Begriffe gestolpert.
117	L1	Ich glaube euch. Ich schaue mir mal die Aufgabe an. [...] Mir gefällt gut, dass du die Werte von Grundwert und Prozentwert einmal ausgetauscht hast, da muss man wirklich überlegen.
118	I	Ja, das war das Ziel. Die Schüler sollen nicht nur Zahlen vergleichen, sondern die Situation verstehen.
119	L2	Das ist gut überlegt. Aber wie sieht die <i>Hilfe</i> hier aus? [...] Das ist eine Beschreibung?
120	I	Ja, genau. Bei der <i>Erklärung</i> wird wieder ein statisches Beispiel verwendet. Bei der <i>Hilfe</i> habe ich direkt die Angabe übernommen und erkläre das Vorgehen.
121	L2	Das macht Sinn. Probieren wir noch ein paar neue Aufgaben aus. [...]
122	L1	Das funktioniert wirklich gut. Waren das jetzt alle Aufgaben?
123	I	Ja, mehr habe ich nicht erstellt.
124	L1	Ich wollte damit nicht sagen, dass es so nicht reicht. Die App ist wirklich gut, mit netten Aufgaben und guten Hilfen. Ich würde vielleicht noch ergänzen, dass die Schüler sich zuerst die <i>Erklärung</i> durchlesen sollen und dann erst den Lehrer fragen.
125	I	Ja, das macht Sinn.
126	L2	Sonst lesen wahrscheinlich nur die besseren Schüler die <i>Erklärung</i> durch.
127	I	Passen die Aufgaben zu den didaktischen Hintergründen?
128	L1	Ja, das würde ich schon sagen. Spontan fällt mir kein weiterer Problemfall ein, der auch noch angesprochen werden muss.
129	I	Wann oder wie würdet ihr die App in der Schule einsetzen?
130	L1	Ich finde, dass die App gut in der Schule eingesetzt werden kann. Ich würde sie überall einsetzen. Durch die Erklärungen können bessere Schüler allein oder in der Gruppe in selber damit arbeiten. Für schwächere Schüler würde ich sie nur zum Üben einsetzen, da diese doch noch mehr Betreuung vom Lehrer benötigen.
131	L2	Ich schließe mich da an.
132	I	Gibt es sonst noch was, was ich ergänzen sollte. Oder etwas noch zur App?
133	L1	Nein, mir würde jetzt nichts mehr einfallen.
134	L2	Ich glaube wir haben alles was uns eingefallen ist immer direkt erwähnt. Ich wüsste jetzt auch nicht mehr.
135	I	Dann möchte ich mich nochmals bei euch bedanken. Das Interview werde ich anonymisiert in meine Masterarbeit aufnehmen, wenn das in Ordnung ist.
136	L1	Das passt für uns gut.

---



### 11.3.2 Protokoll II

Dieses Interview fand an einer Mittelschule am Randgebiet des städtischen Raums statt. Interviewt wurden eine Lehrperson, welche im Transkript als *L* referenziert wird. Fragen des Interviewers sind mit *I* gekennzeichnet. Der Interviewer ist mit den Lehrpersonen per Du. Das Transkript ist von allen dialektal gefärbten Aussagen und Füllwörtern bereinigt. Denk- oder Bearbeitungsphasen sind durch [...] dargestellt.

Nr.		
1	I	Bevor wir beginnen, möchte ich mich bedanken, dass du dich bereit dazu erklärt hast, meine App zu testen. Und natürlich auch für den kurzfristigen Termin.
2	L	Das ist kein Problem, durch die Freistunde habe ich dafür leicht Zeit.
3	I	Also die App ist für Sekundarstufe I gedacht. Momenten ist Bruch- und Prozentrechnung ausprogrammiert. Die Aufgaben sollen vor allem die Probleme und Schwierigkeiten der Schüler ansprechen. Die Probleme habe ich aus der Literatur geholt und dazu Aufgaben erstellt. Ob das nun wirklich die praktischen Probleme anspricht... Dafür benötige ich deine Meinung.
4	L	Okay, passt. und das ist dann der Einstieg zur App?
5	I	Ja, genau. Hier wird der Lernbegleiter Bruno vorgestellt. Durch diesen sollen die Schüler auch eine emotionalere Bindung zur App haben. Außerdem werden noch die Funktionen der Buttons und die Icons erklärt.
6	L	Kommen noch weitere Sachen in der App vor?
7	I	Nein, ich habe es so einfach wie möglich gehalten und alles auf diese Punkte reduziert.
-	-	— Zahlenstrahl —
8	L	Das heißt bei den Punkten leicht, mittel und schwierig kann man dann einstellen, wie <i>schwierig</i> die Zahlen sind, oder?
9	I	Die Schwierigkeitsstufe bezieht sich in diesem Fall auf die Fehlertoleranz. Ich habe ein Toleranzintervall um den gesuchten Bruch gewählt und umso leichter die Schwierigkeitsstufe umso mehr Spielraum gibt es. Die Brüche sind randomisiert generiert, bis hin zu Zwölfteln. Die gesuchten Brüche bleiben gleich schwierig oder gleich leicht.
10	L	Ja, ich finde, dass das eine gute Aufgabe ist. Es ist nur etwas schwierig, sich die Anteile am Computer genau vorzustellen.
11	I	Genau, deshalb gibt es die <i>Hilfe</i> .
12	L	Ah, das hilft wirklich.
13	I	Die Unterteilungen passen sich dann auch automatisch an den jeweiligen Zähler an.
14	L	Das macht die Aufgabe wirklich leichter.
15	I	Genau, und wenn man die App auf einem Tablet öffnet, ist das Abschätzen auch nicht mehr so schwierig.

---

Nr.	-	-
16	L	Die Schulen sind dann nächstes Jahr eh mit Tablets oder Kombi-Geräten ausgestattet, dann würde das sehr gut passen. Okay, dann sehe ich mir mal die anderen Buttons an. Ich fange mit <i>Erklärung</i> an. Der wichtige Punkt ist in der Erklärung: dass bei $\frac{3}{4}$ in vier gleich große Teile zerlegt wird. Gerade in der ersten Klasse macht dieses Aufteilen noch viele Probleme. Es kommen immer wieder Fragen wie, “ <i>In wie viele Teile muss ich das Zerlegen?</i> ” oder “ <i>Müssen die Teile wirklich gleich groß sein?</i> ”. Die Aufgabe spricht die Probleme an, welche meine Schüler dieses Jahr hatten.
17	I	Das passt dann auch gut mit der Literatur zusammen. Perfekt, dann spricht die Aufgabe auch praktische Probleme an. Da wir gerade von der Literatur sprechen. Bei <i>i</i> gibt es auch noch didaktische Hintergründe. Dort wird beschrieben, welche Grundvorstellungen und Problembereiche hinter der Aufgabe stehen und warum die Aufgabe so aufgebaut ist. Und natürlich ist hier noch weiterführende Literatur angegeben.
-	-	— Wechsel zu Didaktikseite —
18	L	Ja, finde ich gut, weil die App Literatur vom neuesten Stand hat. Und vielleicht stehen auch Lehrer mit vielen Berufsjahren neuen Apps eher skeptisch gegenüber, aber dann ist hier schon die didaktische Einbettung dabei. Ich finde es gut, wenn bei jeder Aufgabe das Didaktische dabei ist.
19	I	Außerdem funktioniert die Aufgabe auch hier. Man kann also neben der Beschreibung auch direkt die Aufgabe ausprobieren.
20	L	Perfekt, dann braucht man keinen Split-Screen, sondern hat alles in einem. Das ist sehr, sehr fein.
21	I	Ich habe bereits das Feedback bekommen, dass es eigentlich eine Lehrer- und eine Schülerversion geben sollte. Denn jeder der auf <i>i</i> klickt, kommt eben zur didaktischen Beschreibung. Was sagst du dazu?
22	L	Ich denke, dass bei jüngeren Schülern das eine Option wäre. Aber gerade, wenn solche Aufgaben zur Hausübung genutzt werden, können auch die Eltern sich einlesen, warum man diese Aufgabe macht. Da die Eltern schon immer wissen möchten, warum eine Aufgabe gemacht werden soll und warum diese auf diese Weise gemacht werden soll.
23	I	So habe ich es mir noch gar nicht überlegt. Aber das macht Sinn.
24	L	Da in der Aufgabe schon argumentiert wird, warum die Aufgabe so ist, wie sie ist, können die Eltern das einfach nachlesen. Das ist schon angenehm.
25	I	So, jetzt habe ich die erste Aufgabe unterbrochen. Ich lasse dich mal die Aufgabe zu den <i>gleichen Zahlen</i> lesen.
26	L	Das ist kein Problem. [...] Und das kann man dann einfach wieder anklicken, oder?
27	I	Ich habe es mit dem Schieberegler gelöst, damit die Programmierung ein bisschen einfacher ist.
28	L	Ah, das ist verständlich. Und dann werden die Brüche einfach so dargestellt?
29	I	Ja, genau. Damit die Äquivalenzklassen implizit ein bisschen mitbehandelt werden.

---

Nr.	-	-
-----	---	---

---

30	L	Die Idee der gleichen Brüche ist wirklich wichtig. Vor allem haben sie dann auch ein anderes Bild vor Augen. Weil wir haben es über unterschiedliche Aufteilungen von Pizzen und dem Nebeneinanderlegen von Stücken gemacht. Beispielsweise hat Julia diese Aufteilung gewählt und Viola eine andere. Aber wenn wir ein paar Stücke von beiden nehmen, haben wir wieder eine ganze oder halbe Pizza. Was mir noch auffällt: Es wäre noch schön, wenn am Zahlenstrahl auch die Striche beim jeweiligen Bruch erscheinen. Damit man es noch besser erkennt.
31	I	Das ist eine gute Idee. Das könnte ich wirklich ergänzen. Diese Aufgabe ist wirklich nur zum Überlegen und hat dementsprechend auch nur eine textuelle Lösung. Hier ist vielleicht die Schwierigkeit, dass nicht alle Schüler zuerst überlegen und danach erst die Lösung lesen.
32	L	Ja, das kann natürlich passieren. Wobei ich sagen muss, dass dieser Lösungstext sehr gut formuliert ist und die Schüler könnten das als Merktexat ins Heft übertragen. Ich finde sogar besser erklärt als in manchen Schulbüchern.
33	I	Danke. Ich habe mich wirklich bemüht, etwas zu schreiben, was zwar fachlich korrekt aber immer noch leicht verständlich ist.
34	L	Ich finde, dass das wirklich auf eine erste oder zweite Klasse heruntergebrochen ist.
35	I	Bei dieser Aufgabe ist dann die <i>Hilfe</i> auch wieder ein Text, mit dem klassischen Aufteilen einer Pizza oder eines Kuchens.
36	L	Nein, das gefällt mir gut.
37	I	Das freut mich.
-	-	— Skalieren —
38	L	Das ist eine gute Aufgabe, damit haben sie wirklich Schwierigkeiten.
39	I	Ich habe das Feedback bekommen, dass das Wort "skalieren" Schwierigkeiten machen könnte. Wie siehst du das?
40	L	Ja, in den ersten beiden Klassen schon. In der dritten Klasse kommt aber der Skalierungsfaktor dazu. Die sollten das also wissen. In der ersten oder zweiten Klasse könnte es schwierig sein. Aber man könnte ja einfach das Wort erklären. Dann ist die Schwierigkeit aufgehoben.
41	I	Das ist ein guter Hinweis. Bei der Aufgabe sind immer zwei Bruchzahlen und eine Dezimalzahl dabei, damit auch die Schreibweisen implizit dabei sind.
42	L	Ja, das ist gut. Und ein direktes Feedback gibt es auch wieder bei <i>Überprüfen</i> . Passt. [...] Und das Vergrößern ist auch dabei, das ist gut.
43	I	Ja, es zielt darauf ab, dass Multiplizieren nicht immer vergrößert.
44	L	Das ist eine gute Voraussetzung für das Multiplizieren. Und es ist gut dargestellt. Bei der <i>Hilfe</i> wird es über eine Skala gemacht? Ja, das passt.
45	I	Genau, bei der <i>Erklärung</i> habe ich dann wieder mit statischen Beispielen gearbeitet.
46	L	Ich finde es gut, dass bei der <i>Erklärung</i> nicht das gleiche Beispiel, wie bei der Aufgabe verwendet wird. Nicht dass die Schüler auf die Idee kommen, dass sie nur auf <i>Erklärung</i> klicken müssen, um auf die Lösung zu kommen. Dann ist noch ein Transfer gegeben. Ich würde vielleicht die Erklärung wie bei der didaktischen Erklärung machen, damit man sowohl die Aufgabe sieht als auch die Hinweise. Weil der Transfer ist dann ja trotzdem gegeben.

Nr.	-	-
-	-	— Anteil diskreter Ganzer —
47	L	Dann gehe ich zur nächsten Aufgabe weiter.
48	I	Genau, hier geht es um diskrete Ganze, was doch etwas anderes ist als die Pizzas oder Kuchen, die man sonst in den Schulbüchern immer findet.
49	L	Finde ich gut, dass es auch einfließt. Wir haben es in der Schule mit Finelinern gemacht und diese aufteilen lassen. Bis ein Schüler einen Fineliner zerbrochen hat. Ich finde es gut, dass in der Aufgabe auf diskrete Ganze eingegangen wird, da ansonsten die Schüler denken, dass nur Kreise mit Brüchen etwas zu tun habe. [...] Ist bei der Aufgabe egal, welche Punkte markiert werden.
50	I	Genau, es kommt dann nur auf den Anteil an. Welcher Punkt markiert wird, ist nicht so wichtig.
51	L	Das ist gut. Kann es passieren, dass auch einmal ein halber Punkt markiert werden muss?
52	I	Nein, die Anzahl der Punkte ist immer ein Vielfaches des Nenners. Dann geht es sich gut aus.
53	L	Das finde ich gut und die Gruppierung bei der <i>Hilfe</i> auch. Das ist auch bei der <i>Erklärung</i> gut beschrieben. Das erinnert mich sehr an die Lineare Algebra Vorlesung.
54	I	Ja, genau. Das waren jetzt die drei Aufgaben zum Bruchrechnen.
-	-	— Prozentstreifen —
55	L	Die Aufgabe passt zur Aufgabe bei den Brüchen.
56	I	Genau, was der Zahlenstrahl dort war, ist der Prozentstreifen für die Prozente.
57	L	Das gefällt mir. Ist der Schwierigkeitsgrad wie beim Zahlenstrahl?
58	I	Nein, bei den leichten Aufgaben stellt der Prozentstreifen den Grundwert dar und bei den schwierigen Aufgaben steht am Ende des Prozentstreifens eine zufällige höhere Zahl.
59	L	Das ist dann wirklich schwierig. Wie ist das in der <i>Hilfe</i> gemacht? [...] Ah, mit Skalierungen und dem Anzeigen des Ganzen. So passt das gut.
60	I	Gut. Bei den leichten Aufgaben sind auch Prozentsätze über 100% gegeben. Sollte das eher bei den schwierigen Aufgaben sein?
61	L	Nein, das finde ich nicht. Die Prozentsätze über 100% gehören da schon dazu. Denn ansonsten meinen die Schüler, dass es nichts über 100% gibt. Deshalb finde ich es wichtig, dass das auch vertreten ist. Für mich, gehört es zu den leichten dazu.
62	I	Bei der Erklärung habe ich sowohl die Anteilsvorstellung als auch die Möglichkeit zur Formel beschrieben.
63	L	Das finde ich gut. Denn Schüler lieben Formeln, so haben sie etwas Sicherheit.
-	-	— Grundbegriffe —
64	L	Dann wechsele ich direkt zur nächsten Aufgabe. Ah, dort muss die richtige Darstellung gewählt werden.
65	I	Genau. Es ist entweder ein Prozentwert und ein Grundwert oder ein Anteil und ein Grundwert gegeben und die Schüler müssen den Prozentstreifen anklicken, der die Situation modelliert.
66	L	Ja, finde ich gut.

---

Nr.	-	-
67	I	Damit die Schüler nicht nur Zahlen vergleichen, werden die Zahlen einmal ausgetauscht, sodass sie wirklich die Situation verstehen müssen.
68	L	Nein, das finde ich richtig gut. Wie hast du die <i>Hilfe</i> hier gelöst?
69	I	Die <i>Hilfe</i> bezieht sich direkt auf das Beispiel.
70	L	Ja, das macht Sinn. Das würde ich dann auch so lassen und auf keinen Fall wie die didaktische Erklärung an die Seite schieben. Wenn ich jetzt ein paar Aufgaben ausprobieren. [...] Dann bekomme ich auch wieder direkt Feedback, gefällt mir.
71	I	Hast du das Gefühl, dass die Aufgaben die Problembereiche aufgreifen?
72	L	Ja, ich finde schon. Es sind jedenfalls keine Standard-Aufgaben, welche man überall findet. Es sind wirklich Aufgaben, bei welchen man sieht, wenn das Grundverständnis fehlt. Die Aufgaben behandeln wirklich die Probleme.
73	I	Dann habe ich das Ziel auf jeden Fall erreicht. Was sagst du zum Niveau der Sprache?
74	L	Ich finde das nicht. Momentan ist das Sprachniveau ziemlich weit unten. Aber ich denke, dass das Niveau passt. Schlussendlich sollten die Schüler ja die mathematischen Begriffe kennen. Vielleicht ist es für nicht Muttersprachler etwas schwieriger, aber dennoch machbar. Vor allem kann man ja vor der Verwendung die Begriffe noch erklären. Außerdem spricht es so auch die starken Schüler an, ich finde also das es passt.
75	I	Würdest du eine solche App im Unterricht einsetzen?
76	L	Ja, ich würde sie beispielsweise am Ende einer Unterrichtssequenz verwenden, als Einzelarbeit oder Gruppenarbeit. Ich kann mir das aber auch als Hausübung vorstellen. Wobei es da vielleicht gut wäre, wenn der Lehrer Feedback bekommt, was die Schüler gemacht haben. Sonst bleibt nichts anderes übrig, als den Schülern zu vertrauen, dass sie die Hausübung gemacht haben. Aber für den Unterricht ist die App auf jeden Fall einsetzbar.
77	I	Dann hätte ich alle meine Fragen gestellt und ich sage Danke, dass du dir Zeit genommen hast. Passt es für dich, dass ich das Interview anonymisiert in die Masterarbeit übernehme?
78	L	Kein Problem. Ja, das kannst du gerne machen.

---

### 11.3.3 Protokoll III

Dieses Interview fand an einer Mittelschule im ländlichen Raum statt. Interviewt wurden eine Lehrperson, welche im Transkript als *L* referenziert wird. Fragen des Interviewers sind mit *I* gekennzeichnet. Der Interviewer ist mit den Lehrpersonen per *Du*. Das Transkript ist von allen dialektal gefärbten Aussagen und Füllwörtern bereinigt. Denk- oder Bearbeitungsphasen sind durch [...] dargestellt.

---

Nr.	-	-
1	I	Bevor wir beginnen, möchte ich mich bedanken, dass du dich bereit dazu erklärt hast, meine App zu testen. Und natürlich auch für den kurzfristigen Termin.

---

Nr.	-	-
2	L	Das passt gut. Ich bin schon auf deine App neugierig.
3	I	Super. Generell zur App: Sie ist für die Sekundarstufe I gedacht und momentan gibt es Übungsmöglichkeiten im Bereich der Bruch- und Prozentrechnung. Beim Bruchrechnen gibt es drei Aufgaben und für das Prozentrechnen habe ich zwei Aufgaben erstellt. Die Aufgaben sollen die Problemen aufgreifen, die ich während der Literaturrecherche gefunden habe. Das Ziel ist also, dass die Schüler genau mit den Schwierigkeiten arbeiten können.
4	L	Okay, das klingt gut. Dann sehe ich mir einfach direkt die erste Aufgabe an.
-	-	— Zahlenstrahl —
5	I	Genau, das lasse ich dich mal durchlesen.
6	L	Gut, dann können die Brüche direkt am Zahlenstrahl eingezeichnet werden?
7	I	Ja, man kann direkt auf die Stelle klicken, wo der Bruch sein sollte oder wo man denkt, dass der Bruch ist. Und wenn man auf <i>Überprüfen</i> klickt, kommt sofort ein Feedback.
8	L	Muss man nur in die Nähe des Bruchs klicken?
9	I	Ja, ich habe dazu einfach ein Toleranzintervall erstellt. Denn es ist eher schwierig, die Bruchzahl ganz genau zu treffen. Und die Breite des Toleranzintervalls kann man dann durch die Schwierigkeitsstufen <i>leicht</i> , <i>mittel</i> und <i>schwierig</i> einstellen.
10	L	Dann beziehen sich die Schwierigkeitsstufen auf die Breite und nicht auf die Schwierigkeit der Aufgabenstellung?
11	I	Ja, die Schwierigkeit der Aufgabenstellung bleibt gleich. Es werden aber nur Brüche bis Zwölftel verwendet, sodass man sich die Anteile noch in etwa vorstellen kann.
12	L	Das ist gut. Was macht die <i>Hilfe?</i> [...] Ah, da werden gleich Unterteilungen gemacht.
13	I	Genau, die Unterteilung entspricht dann immer dem Nenner des Bruches.
14	L	Das ist sicher hilfreich. Ändert sich das Beispiel bei der <i>Erklärung?</i>
15	I	Nein, das ist ein statisches Beispiel. Das soll allgemein erklären, wie man die Aufgabe lösen kann, aber die Schüler sollen bei jeder Aufgabe selbst denken.
16	L	Das macht Sinn. Nur eine Anmerkung: in der Praxis haben wir sehr viel Text zum Lesen für die Kinder, aber es zeigt sich oft, dass sie eher nicht so motiviert sind, das wirklich zu tun. Der Idealfall wäre natürlich, dass sie die Erklärung lesen. Bei viel Text sind die meisten Schüler meistens überfordert und dann ist es oft einfacher, dass man aufzeigt und den Lehrer fragt. Deshalb sollte man die Schüler eigentlich zur Selbstständigkeit erziehen. Bei einem schwachen Schüler gibt man natürlich mehr Unterstützung, aber gute Schüler sollten das schon lesen. Aber gerade für schwächere Schüler sollten die Texte noch etwas heruntergebrochen werden. Vielleicht einfach etwas kürzen.
17	I	Ah, ja. Die Brüche der Aufgaben werden zufällig generiert und deshalb gibt es eine große Anzahl an Übungsmöglichkeiten.
18	L	Das heißt es ist komplett zufällig und es läuft nicht einfach eine Sequenz ab?
19	I	Nein, es ist wirklich komplett zufällig. Es kann dann natürlich sein, dass zweimal hintereinander nach der gleichen Bruchzahl gefragt wird, aber das ist eher unwahrscheinlich.

Nr.	-	-
20	L	Das finde ich gut, dass bei jedem neuen Einstieg in die App auch neue Aufgaben kommen. Dann haben die Schüler wirklich viele Übungsaufgaben. Steigt der Schwierigkeitsgrad an, wenn man die Aufgabe öfter macht?
21	I	Nein, der Schwierigkeitsgrad bleibt gleich leicht oder schwierig. Ich habe es mir zwar überlegt, ob die Schwierigkeit sich an das Können der Schüler anpasst, aber ich habe mich dagegen entschieden.
22	L	Ja. Dann springe ich zur nächsten Aufgabe weiter. [...] Die gefällt mir gut.
23	I	Es geht eben darum, dass implizit das Äquivalenzklassenprinzip angesprochen wird.
24	L	Das sieht gut aus. Die Darstellung gefällt mir gut. Genau bei solchen Sachen haben die Schüler noch oft Probleme.
25	I	Danke, das freut mich, wenn es wirklich die Probleme anspricht. Es ist eine Frage, bei der die Schüler zuerst überlegen sollen und dann mit der Lösung vergleichen sollen.
26	L	Ja, das würde ich aber nicht so schlimm finden. Da die Schüler dann ja auch anhand der Lösung das Problem nochmals verstehen können.
27	I	Auf diese Weise habe ich es mir noch gar nicht überlegt, aber das macht Sinn.
28	L	Ja, mir geht es auch manchmal so. Gerade bei Aufgaben im Schulbuch bin ich mir nicht immer sicher, ob sie nun <i>das</i> oder <i>das</i> meinen. Aber nach einem Blick in die Lösung ist dann klar, was genau gefragt ist. Abschreiben ist also nicht immer schlecht. Außerdem gibt es ja auch die <i>Hilfe</i> und die <i>Erklärung</i> .
29	I	Genau, gerade bei der <i>Hilfe</i> habe ich das klassische Pizzabeispiel verwendet.
30	L	Ja, das macht es klar. Aber auch hier ist wieder relativ viel Text zum Lesen. Als Tipp für weitere Aufgaben: Einfach ein bisschen weniger Text.
-	-	— Skalieren —
31	L	Der Text erklärt die Aufgabe gut. Für einen ehemaligen dritte Leistungsgruppenschüler ist das Wechseln zwischen den unterschiedlichen Schreibweisen bei den Faktoren sicher schwierig. Aber man muss ja auch an die guten Schüler denken, welche das können. Ist bei der <i>Erklärung</i> das Verkleinern erklärt? Ah, nein, du hast für beides ein Beispiel gemacht. Finde ich gut.
32	I	Ja, genau. Und mit längeren Erklärungstexten gearbeitet.
33	L	Es ist auch schwierig, es komplett herunterzubrechen. Wenn ich die Aufgabe ausprobiere [...] Man bekommt dann wieder ein Feedback, wenn man auf <i>Überprüfen</i> klickt.
34	I	Ja. Und man kann die Aufgabe dann so lange machen, bis man die richtige Lösung findet.
35	L	Ich finde, dass die Aufgabe super dazu geeignet ist, dass die Kinder ein Gespür bekommen. Und auch die Aufgaben können miteinander verglichen werden. Also beispielsweise, wenn das Bild sehr viel verkleinert wurde, kann man es mit dem Skalierungsfaktor von 0,5 der vorigen Aufgabe vergleichen. Also ich finde, dass man bei dieser Aufgabe auch den Lernprozess gut sieht oder ihn auflösen kann. Das Gefühl bekommen sie bei der Aufgabe sicher. Gefällt mir gut.

Nr.	-	-
36	I	Gut. Die Aufgaben, die du jetzt gesehen hast, haben alle das Bild verkleinert. Aber wenn wir öfter auf <i>Neue Aufgabe</i> klicken, kommt dann auch einmal ein Skalierungsfaktor größer 1. Zum Vorzeigen aller Optionen ist eine komplett randomisierte App ein bisschen schwierig.
37	L	Das passt gut so. Dann sehe ich direkt, wie es beim Üben sein wird.
38	I	Was ich vorhin noch vergessen habe zu erwähnen. Wenn man auf das <i>i</i> klickt, kommt man zu einer didaktischen Erklärung vom Hintergrund und von der Aufgabe selbst. Die Erklärung ist vor allem für die Lehrpersonen gedacht.
39	L	Wow, das ist natürlich eine sehr komplexe Arbeit. Man sieht richtig den Aufwand, der dahintersteckt. Lässig.
40	I	Dankeschön. Ja, die App hat mich schon einiges an Zeit gekostet. Die Aufgaben sind auch in diesem Layout noch funktionsfähig. Man kann also während dem Lesen des didaktischen Hintergrunds die Aufgabe direkt ausprobieren. Man braucht nicht einmal einen Splitscreen dazu.
41	L	Das ist natürlich sehr angenehm. Kommt jeder auf dieses Seite, wenn man daraufklickt?
42	I	Ja, es kann jeder ansehen.
43	L	Ich finde das gut, vor allem wenn jemand daran interessiert ist, kann man es nachlesen. Auch die Eltern können das dann nachlesen und wissen, um was es geht.
44	I	Stimmt.
-	-	— Anteil diskreter Ganzer —
45	L	Mit dem Anteil diskreter Ganzer arbeiten wir bis jetzt noch nicht. Das ist also etwas komplett Neues für unsere Schüler. Das muss man sicher zuerst mit den Schülern im Unterricht besprechen.
46	I	Ja, deshalb wollte ich diese Aufgabe aufnehmen. Weil es in den Schulbüchern auch eher selten vertreten ist, aber in der Literatur empfohlen wird.
47	L	Ich finde es aber gut, da es vielleicht auch etwas abstrahiert. Wenn man das einmal erklärt, dann denke ich schon, dass die Schüler das machen können. Mir gefällt, dass die Punkte gruppiert werden bei der <i>Hilfe</i> , das ist dann übersichtlich. Von der Idee finde ich diese Aufgabe gut.
48	I	Danke.
49	L	Ich finde die Idee gut, dass auch einmal so zu machen. Ich kann mir schon vorstellen, das so in den Unterricht aufzunehmen. [...] Und bei der <i>Erklärung</i> wird dann eh wieder genau beschrieben, wie man die Aufgabe lösen kann. Wieder mit längeren Texten.
50	I	Ja, ich wollte das so genau wie möglich beschreiben. Dann wird es automatisch länger.
51	L	Irgendwie geht es nicht anders. Man muss einfach viele Arbeitsinformationen einfach schreiben.
-	-	— Prozentstreifen —
52	L	Ah, das passt dann gut zur Aufgabe mit dem Zahlenstrahl zusammen.
53	I	Ja, genau.
54	L	Bezieht sich die Schwierigkeitsstufe auch wieder auf den Toleranzbereich?



---

Nr.	-	-
-----	---	---

---

55	I	Nein, in diesem Fall ist bei den leichten Aufgaben der Grundwert immer am Prozentstreifen aufgetragen. Bei den schwierigen Aufgaben ist irgendeine höhere Zahl aufgetragen und die Schüler müssen erst überlegen, was der Grundwert eigentlich ist.
56	L	Oh, das ist dann natürlich schon schwierig. Aber bei der <i>Hilfe</i> kann ich ja dann noch zusätzliches anzeigen lassen. Außerdem können die Schüler ja aussuchen, welche Schwierigkeitsstufe sie machen möchten. Die Aufgabe und die Hilfsmöglichkeiten finde ich wirklich gut. Gerade um das Zahlgefühl zu bekommen, ist es richtig gut, was du da gemacht hast.
57	I	Vielen Dank. Es freut mich natürlich, dass meine App auch zu meinem Ziel passt. Ich wollte noch etwas fragen: Ich habe Aufgaben zu Prozentsätzen über 100% noch zu den leichten Aufgaben gezählt. Wo würdest du diese einordnen?
58	L	Die sind sicher etwas schwieriger. Aber durch deine App hat man so viele Übungsmöglichkeiten. Man hat nicht nur das eine Beispiel, sondern kann so viel dazu üben, wie man möchte und bekommt Feedback dazu. Außerdem hilft die Visualisierung sehr dabei und wieder bekommen sie ein Gefühl dafür. Wenn es über 100% sind, kommen sie dann schnell darauf, dass es größer als der Grundwert werden muss. Deshalb würde ich schon sagen, dass es zu den leichten Aufgaben gehört.
59	I	Danke. Bei der <i>Erklärung</i> ist dann wieder ein statisches Beispiel beschrieben.
60	L	Das passt gut so.
-	-	— Grundbegriffe —
61	L	Ja, das ist eine interessante Aufgabe. Prima.
62	I	Danke. Bei der Aufgabenstellung sind entweder Anteil und Grundwert oder Prozentwert und Grundwert gegeben. Und damit es nicht zu einfach wird, sind die Werte bei den Prozentstreifen einmal ausgetauscht. Es gibt also nicht nur 25% von 80 sondern auch 80% von 25. Dadurch sollen die Schüler nicht nur Zahlen vergleichen, sondern die Situation verstehen.
63	L	Das finde ich gut. [...] Und es gibt wieder das Feedback dazu. Ist bei der <i>Erklärung</i> wieder ein statisches Beispiel?
64	I	Ja, genau. Dass der Transfer zur eigentlichen Aufgabe noch da ist.
65	L	Das macht Sinn. Passt sich die <i>Hilfe</i> immer an die Aufgabe an.
66	I	Ja, die passt sich an. Also wir können uns, das auch gerne einmal ansehen.
67	L	Die <i>Hilfe</i> wechselt immer mit der Aufgabe. Wahnsinn, das ist wirklich gut, was die App alles kann. Die <i>Hilfe</i> finde ich wirklich gut. Denn dann können die Schüler, wenn sie ein Problem bei einer Aufgabe haben, wirklich direkt sehen, wie man vorgeht. Ich muss schon sagen, das ist wirklich durchdacht.
68	I	Dankeschön. Das waren mal alle Aufgaben, die ich erstellt habe. Würdest du sagen, dass die App Probleme anspricht, die wirklich in der Praxis auftauchen?

---

Nr.	-	-
69	L	Die App spricht sehr viel die Vorstellungen und das Vorstellungsvermögen an, die wirklich oft fehlen. Die App passt schon. Natürlich haben manche Schüler da Probleme und andere da. Das Vorstellen von Zahlen, gerade von Bruch- oder Dezimalzahlen, fehlt wirklich oft. Gerade die Aufgaben mit dem Prozentstreifen oder Zahlenstrahl schult das Zahlenverständnis. Das finde ich wirklich gut. Man könnte natürlich sagen, dass die Aufgaben nicht anwendungsorientiert sind oder keinen direkten Bezug zur Schülerwelt haben, aber es geht ja eigentlich um Grundfertigkeiten. Ich denke auch, dass die App den Schülern weiterhilft, vor allem für das Zahlenverständnis.
70	I	Das wäre super, denn dann würde die App das Ziel erreichen.
71	L	Ja, es ist sicher kein Allheilmittel, aber ein wirklich gutes Werkzeug. Da man daraus wirklich etwas mitnehmen kann.
72	I	Würdest du so eine App im Unterricht einsetzen?
73	L	Ja, das würde ich sicher machen. Vor allem die Aufgabe mit dem Prozentstreifen oder der Zahlenstrahl finde ich sehr gut. Die Aufgabe zu den Grundbegriffen machen wir in der Schule ähnlich. Aber es kommt oft zu kurz, da wäre die App eine gute Übungsmöglichkeit. Ich denke auch an die Freiarbeit, dort können die Schüler selber daran arbeiten.
74	I	Das freut mich natürlich, wenn die App einsatzfähig ist. Dann hätte ich alle meine Fragen gestellt und ich sage Danke, dass du dir Zeit genommen hast. Passt es für dich, dass ich das Interview anonymisiert in die Masterarbeit übernehme?
75	L	Kein Problem. Ja, das passt für mich gut.

---